Оптимизация работы системы газлифтных скважин на основе характеристик вытеснения

В.А.Леонов, М.И.Гусев, Е.М.Гусева

Аннотация

Объект исследования в работе являются математические модели, описывающие процесс управления добычей нефти с использованием характеристик вытеснения. Цель работы - разработка алгоритмов аппроксимации характеристик вытеснения и алгоритмов решения задачи максимального извлечения нефти из нефтяного пласта за определенный, достаточно длительный, промежуток времени с учетом ограничений, налагаемых существующими технологиями добычи нефти, реализация алгоритмов на языке MATLAB.

Введение

Для развития нефтяной отрасли на ближайшую и более отдаленную перспективу важное значение приобретают проблемы повышения эффективности разработки месторождений, создания новых технологических процессов и методов эффективной разработки трудно извлекаемых запасов и увеличения нефтеизвлечения из пластов. Решение этих проблем должно способствовать стабилизации, а в отдельных случаях - замедлению темпов падения добычи нефти, более полному извлечению ее из недр. Работа посвящена разработке алгоритмов решения задачи максимального извлечения нефти из нефтяного пласта за определенный, достаточно длительный, промежуток времени с учетом ограничений, налагаемых существующими технологиями добычи нефти. В основу рассматриваемой в работе математической модели положена характеристика вытеснения, связывающая накопленную добычу нефти с накопленной добычей жидкости и получаемая путем статистической обработки данных. Задача максимизации извлечения нефти ставится как задача оптимального управления с терминальным критерием, где в качестве управляющих параметров выбирается скорость добычи жидкости, а зависимость добычи нефти от добычи жидкости описывается при помощи экстраполяции построенных характеристик вытеснения. Ограничения на управляющие параметры заданы системой линейных неравенств. В том случае, если в оптимизации участвуют газлифтные скважины, к данным ограничениям добавляется нелинейное ограничение, появление которого обусловлено тем, что данные скважины используют общий ресурс газа высокого давления.

В работе предложены и обоснованы алгоритмы решения рассматриваемой задачи оптимального управления, основанные на необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Алгоритмы реализованны в виде программ на языке MATLAB с использованием некоторых функций пакета MATLAB Optimization Toolbox.

1 Характеристики вытеснения

Удобный способ прогнозирования основных технологических показателей разработки нефтяных месторождений, базируется на построении характеристик вытеснения нефти водой. Характеристики вытеснения нефти водой являются одним из основных инструментов расчета эффективности выработки запасов нефти. Характеристики с достаточной мерой условности надежны для анализа и прогноза процесса добычи нефти как на определенный период разработки, так и на перспективу, поскольку базируются на фактических данных разработки залежей и интегрально учитывают геолого-физическую характеристику пласта и насыщающих его флюидов, а также особенности эксплуатации скважин, систему и плотность их размещения и т.д. Характеристики вытеснения также широко используются при проведении оценки технологической эффективности мероприятий по интенсификации добычи нефти и повышению нефтеизвлечения пластов. Использование характеристик вытеснения при решении задач разработки нефтяных залежей было впервые предложено Д.А. Эфросом (1959 г.) в виде зависимости накопленного отбора нефти от накопленного отбора жидкости, выраженных в долях объема пор. М.И. Максимов в своей работе дал определение характеристике вытеснения, под которой понимается кривая, отображающая обводнение продукции залежи в процессе ее эксплуатации. Им же одним из первых было показано, что характеристики вытеснения можно применять для уточнения извлекаемых запасов нефти.

Однако необходимо подчеркнуть, что многие из характеристик мало чем отличаются друг от друга, так как в основу их построения заложена основная зависимость $Q_{\text{н}} = f(Q_{\text{ж}})$ с различной модификацией осей абсцисс и ординат. Проведенные многочисленные обобщающие исследования с целью выявления наиболее точных методов до сих пор не дали однозначного ответа. На сегодняшний день известны более 70 видов характеристик вытеснения, которые можно разделить на две большие группы. Первая группа включает в себя характеристики вытеснения, в уравнения которых входит доля нефти или воды в добываемой жидкости (дифференциальные показатели) в зависимости от годовых или накопленных отборов нефти, жидкости или коэффициента извлечения нефти. Вторая группа включает характеристики вытеснения, в зависимости которых входят объемы накопленной добычи нефти, воды и жидкости, т.е. интегральные показатели разработки.

Результаты построения характеристик вытеснения раздельно для каждой группы показали, что способы первой группы характеризуются значительным разбросом точек относительно прямолинейной зависимости по сравнению со способами второй группы, что снижает точность определения текущей обводненности добываемой продукции скважин (залежей) по сравнению со значениями накопленной добычи нефти или жидкости. Характеристики вытеснения второй группы получаются следующим образом. По данным разработки залежи строится зависимость характеристики вытеснения, которая затем аппроксимируется уравнением, наилучшим образом удовлетворяющим фактическим данным. Такие уравнения характеристик вытеснения, как правило, получены только методом подбора, и их линейные модификации после линеаризации уравнений относятся к эмпирическим. Многообразие этих зависимостей объясняется тем, что они построены для специфических геолого-промысловых условий, как правило, одного нефтедобывающего района (или даже отдельных групп залежей внутри нефтедобывающего района) и для залежей с отличными от рассматриваемых условиями могут быть не пригодны.

Первым шагом в данной работе явилось написание программ, нахождения коэффициентов характеристик вытеснения и построение аппроксимирующих функций. Характеристикой вытеснения для заданной группы скважин будем называть функцию $Q_{\text{н}} = f(Q_{\text{ж}})$, где $Q_{\text{н}}$ - накопленная добыча нефти, $Q_{\text{н}}$ - накопленная добыча жидкости для данной группы скважин. Слово "накопленная"означает добытую нефть(жидкость) за время работы скважины (группы скважин), начиная с некоторого момента отсчета времени. Характеристики вытеснения будем строить по информации о фактически добытой нефти(жидкости) за определенный период. В приводимых далее примерах это данные о помесячной добыче за период 2001-2002 гг. для некоторых скважин Самотлорского месторождения.

В литературе [1] обычно рассматриваются следующие функциональные зависимости в качестве аппроксимирующих для характеристик вытеснения

$$Q_{\text{н}} = A + B \cdot \ln(Q_{\text{ж}}),$$

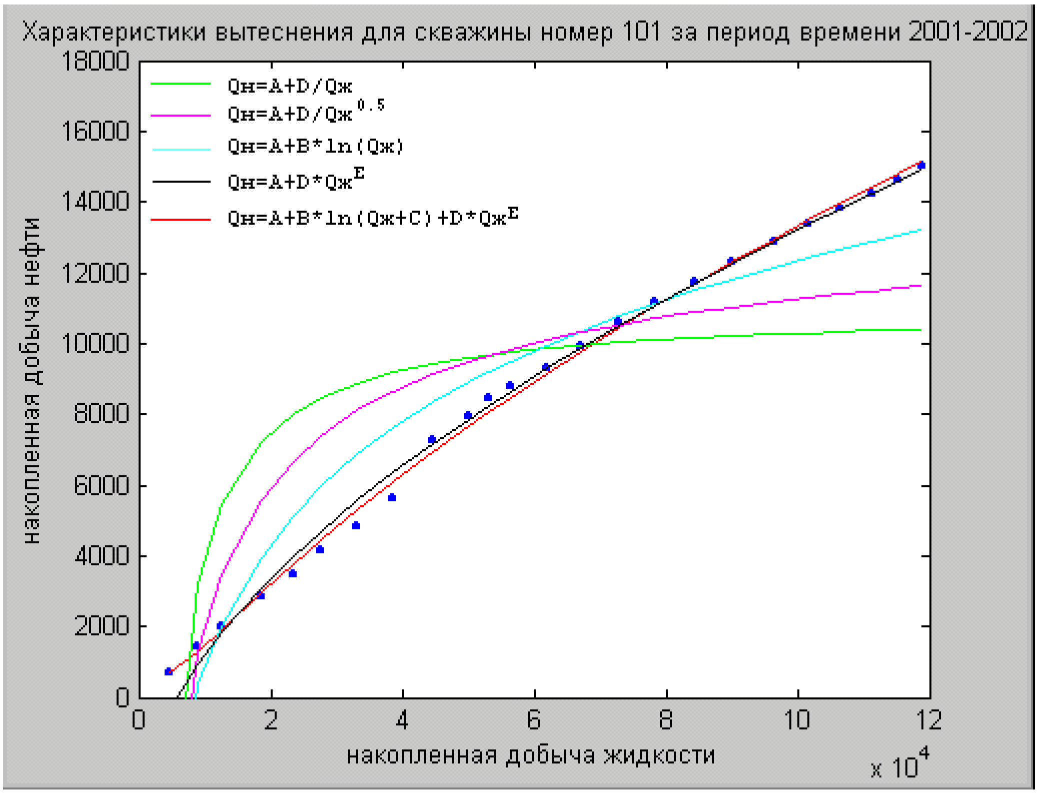

Рис. 1: Характеристики вытеснения для скважины 101 построенные для 3-х, 4-х и 5 параметрических зависимостей

$$Q_{\text{н}} = A + D/Q_{\text{ж}},$$

$$Q_{\text{н}} = A + D/Q_{\text{ж}}^{0,5},$$

$$Q_{\text{н}} = A + D \cdot Q_{\text{ж}}^{E}.$$

В.А.Леоновым [7] была предложена следующая четырехпараметрическая зависимость

$$Q_{\text{н}} = A + B \cdot \ln(Q_{\text{ж}}) + D \cdot Q_{\text{ж}}^{E}. \qquad (1)$$

С увеличением размерности модели следует ожидать увеличение точности аппроксимации, что можно проследить на примере сравнения моделей с разным количеством аппроксимационных коэффициентов, что видно из приводимого ниже рисунка. Здесь видно, что наиболее точный результат аппроксимации дает пятипараметрическая формула [8]

$$Q_{\text{н}} = A + B \cdot \ln(Q_{\text{ж}} + C) + D \cdot Q_{\text{ж}}^{E}, \qquad (2)$$

являющаяся развитием (1), она наиболее универсальна и дает наименьшую погрешность в относительно широком диапазоне времени и обводненности (в том числе и на начальной стадии разработки). На рисунках 1-2 приведены характеристики вытеснения для скважины, построенные по различным функциональным зависимостям, а также характеристики вытеснения для пласта.

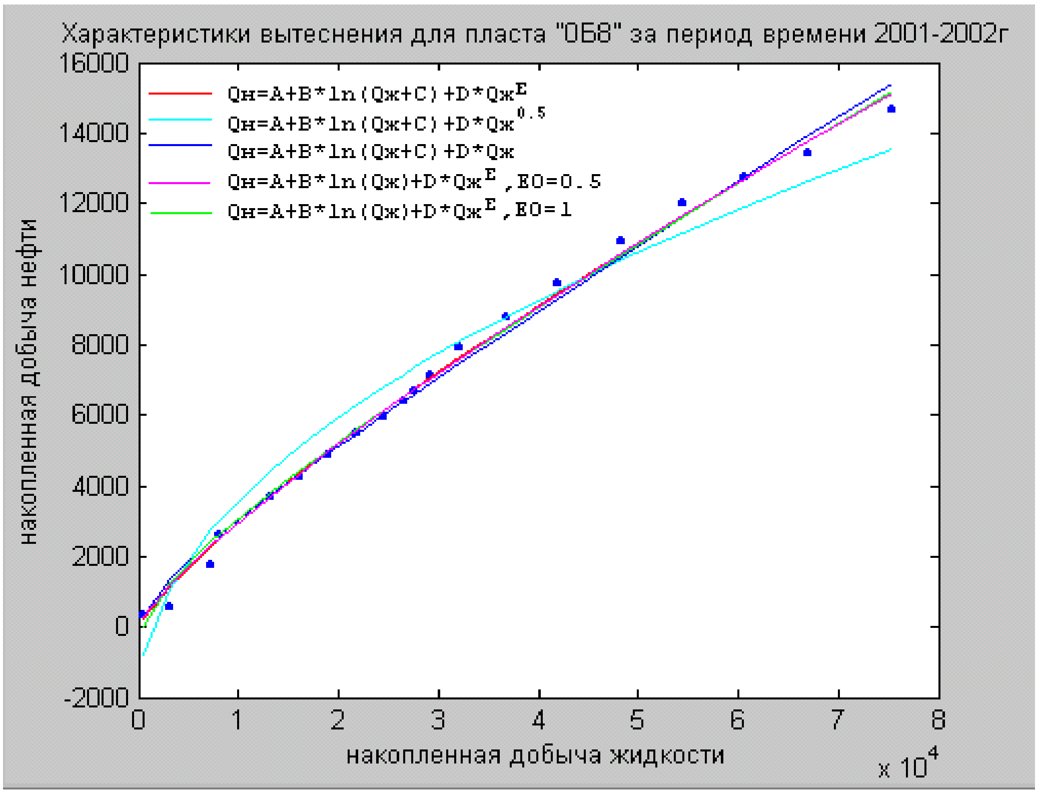

Рис. 2: Характеристики вытеснения для пласта 0Б8, построенные для различных 4-х и 5-параметрических зависимостей

Коэффициенты A, B, C, D, E - определялись по накопленным статистическим данным методом наименьших квадратов (МНК). МНК заключается в нахождении минимума по x функции невязки

$$\psi(x) = \sum_i (F(x, Q^i_{\text{Ж}}) - Q^i_{\text{Н}})^2$$

где $x = (A, B, C, D, E)$ - массив коэффицентов, $(F(x_i, Q_{\text{Ж}}) = A+B\cdot\ln(Q_{\text{Ж}}+C)+D\cdot Q^E_{\text{Ж}}$, $Q^i_{\text{Ж}}, Q^i_{\text{Н}}$ - данные измерений. В рассматриваемой задаче брались помесячные данные о накопленной добыче нефти и жидкости за два года, т.е. i менялось от 1 до 24. Отметим, что функция $\psi(x)$ не является выпуклой во всей области определения и может иметь локальные минимумы. Успех в решении этой задачи во многом зависит от удачно выбранного начального приближения. Задача решалась в два этапа. Вначале фиксировались значения параметров $\bar{C}, \bar{E}$ и решалась задача минимизации $\psi(x)$ при фиксированных $x_3 = \bar{C}, x_5 = \bar{E}$. Эта задача представляет из себя классический линейный МНК, ее решение $x_1 = \bar{A}, x_2 = \bar{B}, x_4 = \bar{D}$ находится явно из решения линейной системы алгебраических уравнений 3-го порядка. Далее решается задача минимизации $\psi(x)$ во всем 5-мерном пространстве параметров, причем в качестве начального приближения выбирается точка $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E})$. Задача решается при помощи функции $lsqcurvefit$ из пакета MATLAB Optimization Toolbox. Подробно эта функция описана в Приложении. Следует отметить, что с увеличением размерно-

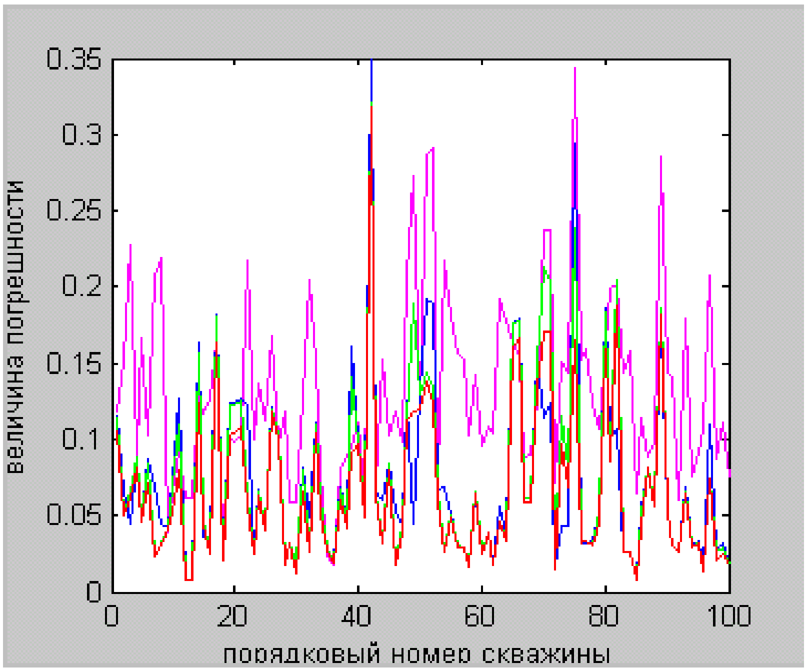

Рис. 3: Относительные погрешности аппроксимации, построенные для 3-х (фиолетовый цвет), 4-х (синий и зеленый цвет) и 5 (красный цвет) параметрических зависимостей

сти модели возникают проблемы связанные с вычислительной устойчивостью задачи, удачным выбором начального приближения. Кроме того, модели с небольшим числом параметров предпочтительней использовать с точки зрения точности прогноза. Поэтому нужен разумный компромисс между размерностью и точностью модели. Вычислительные эксперименты, проведенные на данных по нескольким сотням скважин, показали, что по точности пятипараметрической модели мало уступают модель (1), а также следующая модель

$$Q_{\text{н}} = A + B \cdot \ln(Q_{\text{ж}} + C) + D \cdot Q_{\text{ж}}. \tag{3}$$

Отметим, что выбор в качестве начальных условий для коэффициентов пятипараметрической модели, коэффициентов, полученных для (1) привел к повышению точности аппроксимации.

Средние величины относительной погрешности аппроксимации на данном массиве скважин равны:

для трехпарметрической зависимости $Q_{\text{н}} = A + D \cdot Q_{\text{ж}}^E$ – 13.4 процента,

для четырехпараметрической - -$Q_{\text{н}} = A + B \cdot \ln(Q_{\text{ж}}) + D \cdot Q_{\text{ж}}^E$ – 7.6 процента, для четырехпараметрической$Q_{\text{н}} = A + B \cdot \ln(Q_{\text{ж}} + C) + D \cdot Q_{\text{ж}}$ – 8.1 процента,

для пятипараметрической$Q_{\text{н}} = A + B \cdot \ln(Q_{\text{ж}} + C) + D \cdot Q_{\text{ж}}^{E}$– 6 процентов.

На рисунках 3-4 приведены графики относительных погрешностей для указанных зависимостей, а также гистограммы распределения погрешностей.

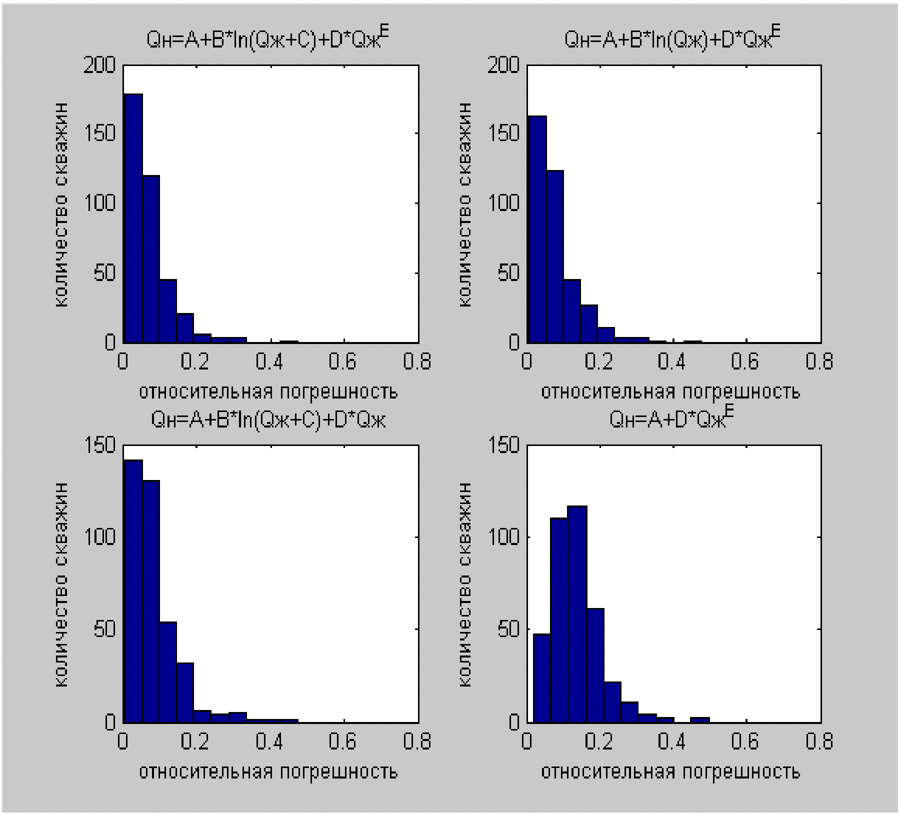

Рис. 4: Гистограммы распределения погрешностей

Данные, которые используются для построения характеристик вытеснения, а также при решении задач оптимизации, приведены в виде таблицы Excel (рис.6).

Здесь Field-месторождение, Well-номер скважины, Lift-способ добычи, Zone-пласт, OilProdMonth -добыча нефти за месяц, OilProdDevelop - накопленная добыча нефти, FluidProdRCMonth - добыча жидкости за месяц, FluidProdRCDevelop -накопленная добыча жидкости.

Передача данных осуществлялась при помощи инструмента Excel Link, который позволяет обмениваться данными между MATLAB и Excel, обеспечивает возможности для анализа, обработки и представления данных. Данные передавались в несколько больших массивов MATLAB и в последующем хранились и обрабатывались в этой системе. Иногда удобнее осуществлять фильтрацию данных в Excel и затем передавать их в MATLAB.

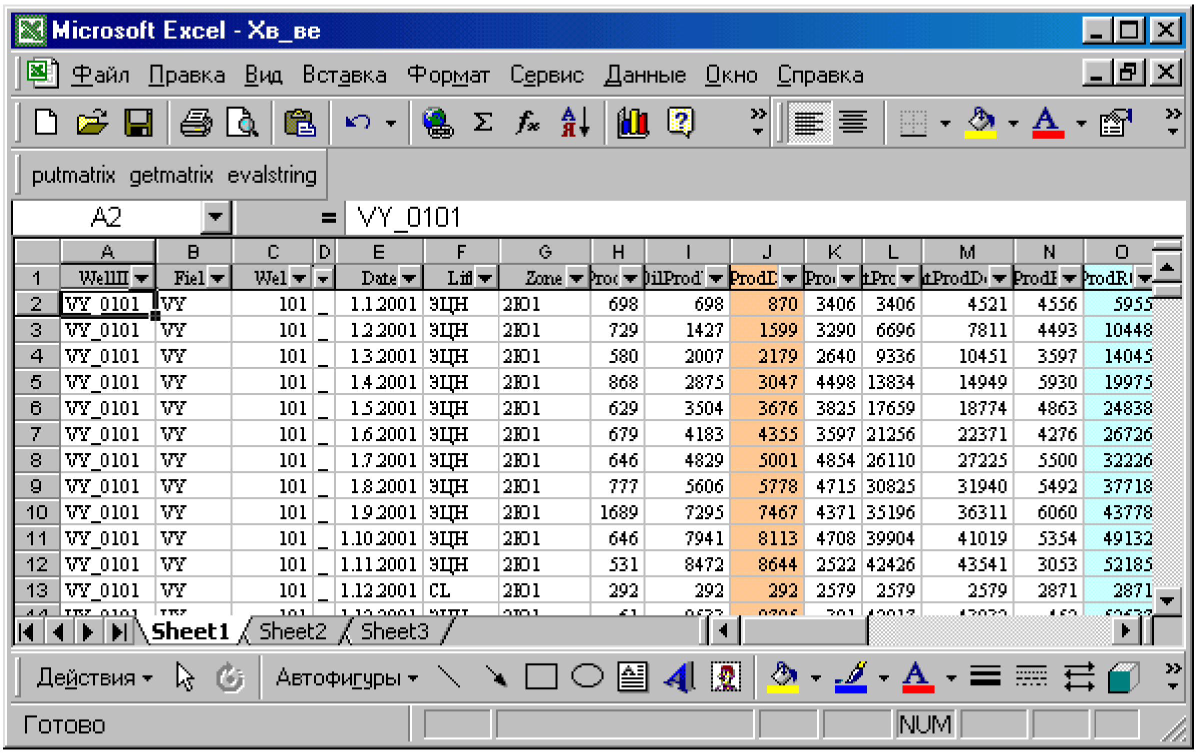

Рис. 5: Часть таблицы Excel, содержащей данные для построения характеристик вытеснения

2 Постановка задачи оптимизации нефтедобычи с учетом характеристик вытеснения по отдельным скважинам (группам скважин)

Задача максимизации нефтедобычи по группе скважин может быть сведена к задаче оптимального управления для системы с терминальным критерием качества. Пусть оптимизируемая группа состоит из n скважин (групп скважин). Для i-ой скважины (группы скважин) из оптимизируемой группы обозначим через f_i характеристику вытеснения $Q^i_{\text{Н}} = f_i(Q^i_{\text{Ж}})$. Будем далее для упрощения постановки задачи использовать следующие обозначения $x_i = Q^i_{\text{Ж}}, i = \overline{1,n}$. Введем временной промежуток планирования $[t_0, t_1]$, где t_0—начальный момент планирования, t_1—конечный момент. Накопленную добычу жидкости по i–ой скважине можно рассматривать как функцию времени: $x_i = x_i(t)$, где t— текущий момент времени. Обозначим $u_i(t) = \dot{x}_i(t)$, где точка обозначает производную по времени. Таким образом, $u_i(t)$ есть скорость изменения накопленной добычи жидкости по i–ой скважине, или, другими словами, это величина добычи жидкости на i–ой скважине за единицу времени. Обозначим через $u(t)$ вектор $u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$, а через $x(t)$ вектор $(t) = (_1(t), ..., x_n(t))$. Связь между $x(t)$ и $u(t)$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad t_0 \le t \le t_1, \quad x(t_0) = x^0. \tag{4}$$

Система (4) называется управляемой системой, функция $u(t)$ — управлением, $x(t)$ — вектор состояния системы. В качестве вектора начальных условий x^0 для системы (4) берем накопленную добычу жидкости к начальному моменту рассматриваемого периода времени. Задача состоит в выборе управления (функции $u(t)$), удовлетворяющего заданным ограничениям, так, чтобы к концу промежутка планирования t_1 достичь заданной цели.

Вначале опишем ограничения на $u(t)$. Рассматривается два вида ограничений на управление. Первые - это ограничения по добыче жидкости по каждой скважине в каждый момент времени (в качестве единицы измерения времени берутся, например, сутки). Вторые - ограничения на добычу жидкости по группе скважин в каждый момент времени, причем группы могут пересекаться. Ограничения в общем случае зависят от времени, т.е. задача нестационарная.

Эти ограничения имеют вид

$$u(t) \in U(t), \tag{5}$$

где

$$U(t) = \{u \in R^n : a_i(t) \le u_i \le b_i(t), i = \overline{1,n},\ (p^k, u) \le R_k(t),\ k = 1, ..., 4\}. \tag{6}$$

Ограничение $a_i(t) \le u_i(t) \le b_i(t)$- это ограничение на добычу жидкости по каждой скважине за сутки. Здесь $a_i(t)$ - минимально-возможный дебит i-й скважины, $b_i(t)$ - максимально-возможный дебит i-й скважины. Значение $a_i(t)$ обусловлено:

- режимом, предупреждающим осложнения работы скважины (например, замерзание коллектора, т.е. зимой величина $a_i(t)$ должна быть больше, чем летом);
- регулировочной кривой для насоса.

Значение $b_i(t)$ обусловлено:

- характеристиками скважинной установки;
- коэффициентом продуктивности;
- пластовым давлением;
- буферным (устьевым) давлением.

Ограничения $(p^k, u) \le R_k(t)$, $k = 1, ..., 4$ задают ограничения на суммарный дебит по группам скважин. Здесь p^k - вектор, состоящий из нулей и единиц. Все скважины делятся на 4 группы G_1, G_2, G_3, G_4, которые могут пересекаться. Для скважины с номером i $p_i^k = 1$, если она входит в группу G_k, и $p_i^k = 0$ в противном случае. Величина $R_k(t)$ - ограничение на суммарный дебит жидкости по группе скважин G_k. Для нашей задачи

$R_1(t)$ - ограничение системы подготовки нефти, воды и газа (чаще всего распространяется на всю группу скважин);

$R_2(t)$ - ограничение системы нефтегазосбора распространяется на группу скважин объединенных одним направлением трубопроводов (G_2) является подмножеством множества G_1). Система нефтесбора предназначена для поддержания буферного давления, а значит для поддержания максимально возможных дебитов $b(t) = (b_1(t), ..., b_n(t))'$. При увеличении $R_2(t)$ надо уменьшать $b(t)$.

$R_3(t)$ - ограничение системы поддержания пластового давления (ППД) распространяется на группу скважин объединенных одним пластом (эксплуатационным объектом) или одним блоком пласта (взаимодействующими через пласт скважинами). (G_3 является подмножеством множества G_1 и может пересекаться с G_2) Система ППД предназначена для поддержания пластового давления, а значит для поддержания максимально возможных дебитов $b(t)$. При увеличении $R_3(t)$ надо уменьшать $b(t)$.

$R_4(t)$ - ограничение скважинной установки распространяется на уже вскрытые или планируемые к перфорации пласты (эксплуатационные объекты) по данной скважине. G_4 является подмножеством множества G_1 и может пересекаться с G_2, G_3. С увеличение дебита жидкости по одному из пластов вскрытых скважиной происходит уменьшение дебита жидкости по другому за счет установленного (а в будующем, изменяющегося путем расчета по физико-математической модели скважинной установки) ограничения $R_4(t)$. При уменьшении $R_4(t)$ (например, заменой изношенной эксплуатационной колонны новой колонной меньшего диаметра) уменьшается $b(t)$ по каждому из объектов управления.

Целью управления системой скважин является максимизация критерия качества. В качестве критерия качества рассматриваем функционал:

$$J(u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i(t_1)) \to \max,$$

$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i(t_1)) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i(t_0))$ - накопленная суммарная добыча нефти за период $[t_0, t_1]$ по рассматриваемым скважинам, $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i(t_0))$ - известная величина, характеризующая извлеченную нефть к началу промежутка планирования. Таким образом, рассматривается задача максимального извлечения нефти за заданный промежуток времени. Управление $u(t)$, доставляющее максимум функционалу J, называется оптимальным. Исследуемая задача относится к классу задач оптимального управления.

На первый взгляд подобная постановка задачи является не очень реалистичной, поскольку требует задания ограничений в виде множеств $U(t)$, т.е. в каждый момент времени. И поиск оптимального управления в виде функции $u(t)$ может привести к необходимости менять режимы управления слишком часто, что не допускается технологией производства. На самом деле подобная постановка вполне допустима.

Во-первых, задания ограничений в виде множеств $U(t)$ не исключает возможности рассматривать случай, когда $U(t) = U = \text{const}$, т.е. ограничения не меняются со временем. Либо они могут меняться, но остаются постоянными на промежутках заданной длины Δ (например, раз в месяц, квартал или год). В этом случае $U(t)$ — кусочно-постоянная функция $U(t) = U_k, t_k \le t \le t_{k+1}$, $t_{k+1} - t_k = \Delta$.

Что касается управления в виде функции $u(t)$, это действительно выглядит, как не очень приемлемое допущение. Однако, как мы увидим чуть позже, оптимальное управление оказывается постоянным на тех промежутках, где постоянны ограничения $U(t)$ на управление. И такое управление нетрудно реализовать на практике.

Подчеркнем еще, что ограничения должны быть заданы заранее, до решения задачи. Если на каком-то этапе приходится по тем или иным причинам изменить их, то ранее найденный оптимальный режим уже не будет таковым в последующем и требует пересчета.

Приведем кратко необходимые сведения из теории оптимального управления, которые мы будем использовать при решении задачи. В общем случае уравнения управляемой системы имеют более общий, чем (4) вид

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), \tag{7}$$

где $g(x, u, t)$ - некоторая n - мерная вектор-функция. Пусть $u(t) \in U(t)$ - ограничения на управление. Будем считать, что каждое управление $u(t), t \in [t_0, t_1)$, оценивается по значению функции, заданной на правых концах траекторий системы (7)

$$J(u) = \varphi(x(t_1)).$$

Относительно функции $\varphi(x)$ предполагается, что она определена и непрерывна вместе с $\partial\varphi/\partial x$. Задача максимизации функционала $J(u(\cdot))$ по всем допустимым управлениям называется простейшей задачей терминального управления(задачей управления конечным состоянием).

Гамильтонианом системы (7) называется функция

$$H(x, \psi, u, t) = \psi^\top g(x, u, t),$$

где ψ - произвольный n-мерный вектор, символ $\top$ означает транспонирование вектора. Все векторы мы рассматриваем как векторы-столбцы. Линейную относительно ψ

систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = \frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}, \tag{8}$$

называют сопряженной системой. Говорят, что управление $u(t), t \in [t_0, t_1)$, в простейшей задаче терминального управления удовлетворяет условию максимума, если для него и траекторий $x(t), \psi(t)$ основной и сопряженной системы для всех моментов $t \in [t_0, t_1)$ выполняется условие

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{v \in U(t)} H(x(t), \psi(t), v, t). \tag{9}$$

Справедлива следующая теорема [9, 2](принцип максимума Понтрягина)

Теорема 2.1 *Если $u(t)$ оптимальное управление в простейшей задаче терминального управления, то оно удовлетворяет условию максимума.*

Эта теорема дает необходимое (но в общем случае не достаточное) условие оптимальности. Функция $\psi(t)$ является бесконечномерным аналогом вектора множителей Лагранжа для задачи на условный максимум функции многих переменных.

Если управляемая система линейна $\dot{x} = Ax + Bu$, $U(t)$ — выпуклый компакт при каждом t, φ - вогнутая (выпуклая вверх) функция, то принцип максимума дает и достаточные условия оптимальности. Если управление $u(t)$ и отвечающая ему траектория $x(t)$ удовлетворяют соотношениям (7)-(9), то управление $u(t)$ оптимально.

В нашем случае мы имеем

$$g(x, u, t) = u, \quad H(x, \psi, u, t) = \psi^\top u = \sum_{i=1}^{n} \psi_i u_i, \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

Следовательно, сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \psi_i(t_1) = f_i'(x_i(t_1)),$$

где f_i' обозначает производную функции $f_i(x_i)$ по x_i. Отсюда следует, что $\psi_i = c_i$ является константой (не зависит от t) и эта константа равна $c_i = \psi_i(t_1) = f_i'(x_i(t_1))$.

Условие максимума тогда запишется в следующем виде

$$c^\top u(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(t) = \max_{v \in U(t)} c^\top v = \max_{v \in U(t)} \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

Пусть ограничения задачи не зависят от времени на некотором временном интервале $U(t) = U$, $t \in T$. Тогда на данном интервале времени оптимальное управление удовлетворяет равенству

$$c^\top u(t) = \max_{v \in U} c^\top v, \quad t \in T. \tag{10}$$

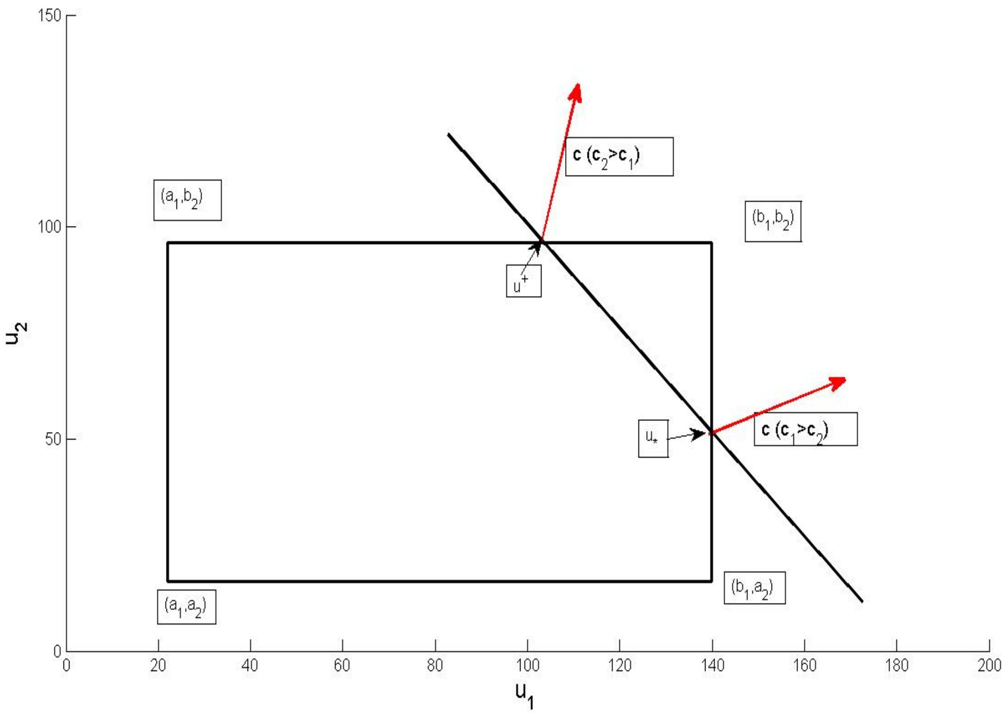

Рис. 6: Иллюстрация к принципу максимума

Отметим, что f_i – вогнутые (выпуклые вверх) функции. Такое поведение функций является типичным для характеристик вытеснения, с физической точки зрения оно означает увеличение обводненности продукции скважин со временем. Поэтому в нашей задаче принцип максимума дает необходимые и достаточные условия оптимальности. Учитывая данное обстоятельство, мы можем заключить, что оптимальное управление постоянно на отрезке $T : u(t) = v^*$, $t \in T$, где v^* - точка максимума линейной функции $c^\top v$ на выпуклом многограннике U. Эта точка обязательно лежит на границе U и в типичном случае является его угловой точкой.

Однако, умения решать задачу (10), которая является типичной задачей линейного программирования еще недостаточно. Дело в том, что мы не знаем величины коэффициентов c_i в (10), которые зависят от $x_i(t_1)$. А данные величины определяется оптимальным управлением, которое, в свою очередь определяется через c_i. Поясним, сказанное на простом примере.

Пусть $n = 2$, то есть мы рассматриваем систему из двух скважин. Будем считать ограничение на u не зависящим от времени

$$U = \{(u_1, u_2) : a_1 \le u_1 \le b_1, a_2 \le u_2 \le b_2,\, u_1 + u_2 \le R.\}$$

На Рис.6 изображено множество U. Это пятиугольник на плоскости (u_1, u_2), ограниченный прямыми, параллельными координатным осям и прямой $u_1 + u_2 = R$ Понятно, что максимум функции $c^\top u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ достигается либо в точке u^+, если $c_2 > c_1$, либо u_*, если $c_1 > c_2$ (см. рисунок, где красным цветом изображен вектор c, отвечающий этим двум вариантам). В первом случае при $u = u_*$ имеем $x_1(t_1) = x_1^0 + Lu_{*1}$, $x_2(t_2) = x_2^0 + Lu_{*2}$, где обозначено $L = t_1 - t_0$. И если $f_2'(x_2^0 + Lu_{*2}) > f_1'(x_1^0 + Lu_{*1})$, то u^+ - решение. Если неравенство не выполнено, то аналогично анализируется второй вариант, когда в качестве кандидата на оптимальное решение рассматривается u_*. Может оказаться, что ни один из двух вариантов не подходит. В этом случае оптимальное решение лежит на отрезке прямой между векторами u^+ и u_*. Все точки отрезка удовлетворяют принципу максимума при $c_1 = c_2$ и решение однозначно определяется из равенства $f_2'(x_2^0 + Lu_2) = f_1'(x_1^0 + Lu_1)$.

Понятно, что подобный анализ затруднителен при большом числе скважин. Но в этом и нет нужды. Главное, что мы знаем, что оптимальное решение не зависит от времени при постоянных ограничениях. Поэтому $x(t_1) = x^0 + Lu$, и нам надо максимизировать

$$J(u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^0 + Lu_i)$$

при ограничениях

$$a_i \le u_i \le b_i, \quad i = 1, ..., n, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \le R.$$

Данная задача эффективно решается с использованием алгоритмов выпуклого программирования.

8888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888888

3 Задача оптимизации системы газлифтных скважин с учетом характеристик вытеснения

В том случае, если среди скважин есть газлифтные (ГС), задача несколько усложняется. Газлифтный способ добычи нефти основан на закачивании в нефтяные скважины газа высокого давления (ВД) с целью увеличения дебита нефти (жидкости). Газлифтный способ добычи нефти в отличие от других обладает большой гибкостью и оперативностью при изменении технологических режимов в широком диапазоне. Оптимизацию и управление работой газлифтного комплекса можно осуществлять за счет изменения технологических режимов работы ГС меняя расход газа ВД по скважинам. При наличии газлифтных скважин в ограничения задачи добавляется нелинейное неравенство, учитывающее ограничения на ресурс газа ВД. Пусть m - число газлифтных скважин, не ограничивая общности можно считать эти скважины пер-

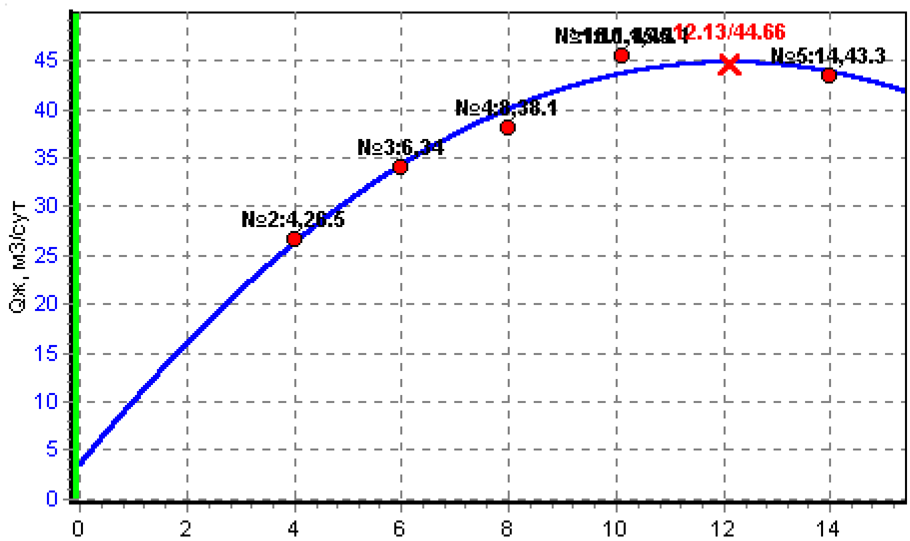

Рис. 7: Характеристическая кривая по газлифтной скважине. Результат обработки данных в программе BOX, работающей с базой данных по газлифтным скважинам

выми в списке, v_i - объем газа ВД, закачиваемого в i- ю скважину, $R_g(t)$- суммарный ресурс газа, вырабатываемый компрессорными станциями. Функцию $u_i = g_i(v_i)$, описывающую зависимость дебита жидкости (нефти) от объема закачиваемого в скважину газа ВД называют характеристической кривой скважины. В рабочем диапазоне изменения v_i это возрастающая, вогнутая функция, которая хорошо аппроксимируется полиномом второй степени [3]. Типичный вид характеристической кривой показан на следующем рисунке, где по оси абцисс откладывается объем газа высокого давления, по оси ординат - суточный дебит жидкости.

Рассмотрим, какие изменения коснутся постановки задачи, при включении в оптимизацию газлифтных скважин. Управляемая система и функционал остаются теми же самыми. Естественно для газлифтных скважин считать управляющими параметрами v_i и в ограничения на управление добавить неравенства

$$\underline{v_i}(t) \leq v_i \leq \overline{v_i}(t) \; i = 1, ..., n, \; \sum_{i=1}^{m} v_i \leq R(t). \tag{11}$$

Однако, при этом ограничения на суммарную добычу жидкости имеют такой вид:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^k q_i(v_i) + \sum_{i=m+1}^{n} p_i^k u_i \leq R_k(t). \tag{12}$$

Это ограничение задает уже невыпуклое и, вообще говоря, несвязное множество в пространстве управляющих параметров, что с учетом большой размерности задачи, существенно осложняет нахождение $u(t)$ из соотношений принципа максимума (задача становится многоэкстремальной). Для того, чтобы избежать связанным с этим проблем, поступим следующим образом. Будем считать управляющими параметрами по прежнему u_i. В диапазоне $\underline{v_i}(t) \leq v_i \leq \overline{v_i}(t)$ функции $q_i(v_i)$ монотонно возрастают, поэтому их можно обратить. Обратные функции $q_i^{-1}(u_i) = v_i(u_i)$, как нетрудно видеть, являются выпуклыми. И единственное изменение, которое придется внести в постановку задачи, связано к добавлению к линейным неравенствам, определяющим $U(t)$, одного выпуклого неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} v_i(u_i) \leq R(t).$$

Теперь задача

$$c^\top u^0(t) = \max\{c^\top u : u \in U(t)\}, \tag{13}$$

становится уже задачей выпуклого программирования.

Для решения этой задачи использовались два разных метода. Первый из них основан на функции **fmincon** из пакета MATLAB Optimization Toolbox. **fmincon** реализует метод последовательного квадратичного программирования и расчитан на решение достаточно широкого круга задач математического программирования с линейными и нелинейными целевыми функциями и ограничениями. В задаче (15) целевая функция линейна и все ограничения, за исключением одного, линейны. Поэтому для решения был использован также метод, основанный на сочетании решения задач линейного программирования с использованием функции **linprog** и проектирования на нелинейное ограничение. Этот метод состоит в следующем.

Пусть нелинейное ограничение имеет вид

$$g(u) := \sum_{i=1}^{m} v_i(u_i) - R(t) \leq 0.$$

На первом шаге решаем задачу ЛП без учета данного ограничения. Обозначим решение через u^1. Если $g(u^1) \leq 0$, то u^1– решение задачи. В противном случае спроектируем u^1 на ограничения, используя конструкции [4]. Положим

$$w_i(\lambda) = u_i^1 - \lambda \frac{\partial u_i}{\partial v_i}(u^1),$$

$$u_i(\lambda) = w_i(\lambda), \text{если } w_i(\lambda) \geq a_i \text{ и } u_i(\lambda) = a_i \text{ в противном случае,}$$

где λ- скалярный множитель. Функция $g(u(\lambda))$ убывает при $\lambda > 0$. Находим λ_1 – корень уравнения $g(u(\lambda)) = 0$. Заметим, что если ограничения задачи совместны, то $\sum_{i=1}^{m} v_i(a_i) - R(t) \leq 0$, и значит корень уравнения существует. Полагаем $u^2 = u(\lambda_1)$. Добавляем к ограничениям задачи линейное ограничение

$$(\frac{\partial g}{\partial u}(u^2), u) \leq (\frac{\partial g}{\partial u}(u^2), u^2). \tag{14}$$

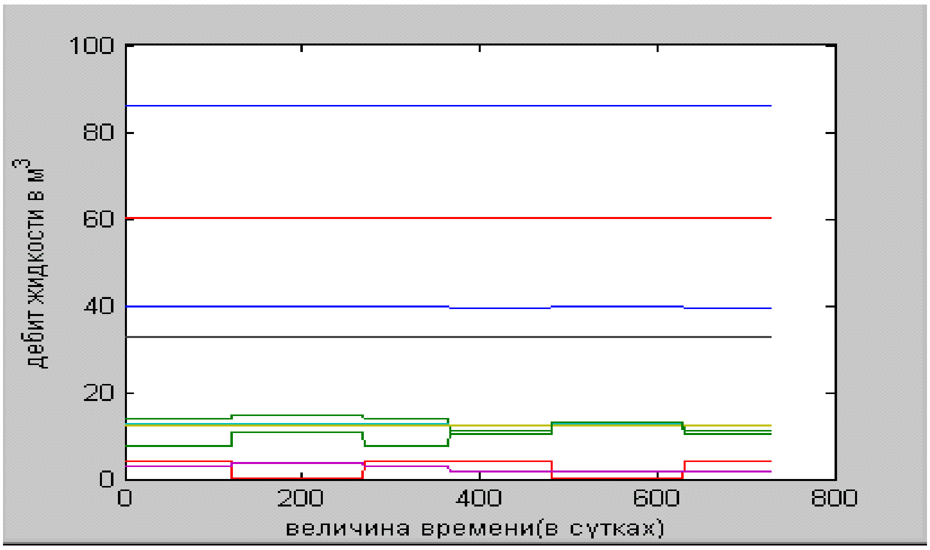

Рис. 8: Графики оптимального управления

Из выпуклости $g(u)$ следует, что множество решений получившейся системы линейных неравенств содержит допустимое множество исходной задачи. Действительно, в силу известного неравенства для выпуклых функций (см.,например, [4])

$$g(u) - g(u^2) \geq (\frac{\partial g}{\partial u}(u^2), u - u^2).$$

Следовательно, из $q(u) \leq 0$ вытекает неравенство (16).

Далее повторяем процедуру, беря в качестве исходной точки, решение задачи ЛП с новыми ограничениями. Таким образом, на каждом шаге алгоритма приходится решать задачу линейного программирования. Нетрудно доказать, что данная процедура сходится к решению исходной задачи.

Алгоритм решения был запрограммирован на языке MATLAB и опробован на реальных данных. На рисунке 8 приведены графики оптимального управления для группы из 10 скважин, 5 из которых газлифтные для одного из вариантов расчета. По оси абцисс откладывается время в сутках, прошедшее с начального момента времени, по оси ординат - величина управляющих воздействий (суточный дебит жидкости в м3). Ограничения на управление выбраны кусочно-постоянными по времени. Оптимальные управления здесь кусочно-постоянные функции. Выигрыш в величине добычи нефти на оптимальных режимах по отношению к действующим составлял от 4 до 10 процентов для различных вариантов расчетов, которые отличались величиной ограничений на управляющие параметры.

Заключение

Перечислим основные результаты работы.

Решены вопросы передачи данных по скважинам из таблиц Excel в рабочее пространство системы MATLAB. Написаны процедуры для обработки данных по скважинам в MATLAB.

Реализован нелинейный метод наименьших квадратов для построения аппроксимирующих кривых для характеристик вытеснения, проведен анализ точности аппроксимаций для различных видов функциональных зависимостей.

Приведена формализация задачи максимизации нефтедобычи за определенный период времени как задачи оптимального управления. Исследованы свойства задачи и структура оптимальных решений вытекающая из применения принципа максимума.

Предложены и обоснованы алгоритмы решения задачи, базирующиеся на примененииии методов прямых итераций и условного градиента. Для решения задачи максимизации гамильтониана при наличии совместных ограничений по расходу газа высокого давления предложен алгоритм решения, основанный на сочетании решений задачи линейного программирования с проектированием на нелинейные ограничения.

Алгоритмы реализованы в виде программ на языке MATLAB, проведены численные расчеты для небольшого числа скважин.

Список литературы

[1] Бочаров В.А. Разработка нефтяных пластов в условиях проявления начального градиента давления. -М.:ВНИИОЭНГ, 2000.

[2] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. -Минск:"Наука и техника 1974.

[3] Долгих Г.М , Леонов В.А., Шигапов Р.Р. Оптимизация работы основных объектов газлифтной добычи нефти. -М.: ВНИИОЭНГ, 1986.

[4] Еремин И.И. Теория линейной оптимизации. -Екатеринбург: Издательство "Екатеринбург 1999.

[5] Карманов В.Г. Математическое программирование. -М.: Наука, 1980.

[6] Леонов В.А. Способ эксплуатации системы ГС. - А.С. СССР N 1091618.

[7] Леонов В.А. Способ адаптивной оптимизации пластового давления// Тезисы доклада научно-практической конференции VIII Международной специализированной выставки "Нефть, газ. Нефтехимия - 2001Новейшие методы увеличения нефтеотдачи пластов - теория и практика их применения". -Казань, 2001

[8] Леонов В.А. Одновременно-раздельная эксплуатация нескольких пластов одной сеткой скважин для повышения их нефтеотдачи// Доклад на заседании общества нефтяников SPE.- Нижневартовск, 2003.

[9] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. -М.: Наука, 1972

[10] Мартынов Н.Н., Иванов А.П. MATLAB 5X. Вычисления, визуализация, программирование. -Москва : Кудиц-Образ, 2000.

[11] MATLAB Optimization Toolbox. Users Guide. Version 5. MathWorks, 1997.