

УДК 539.4

МЕТОД РАСЧЕТА РАДИАЛЬНОГО ТРОЙНИКОВОГО СОЕДИНЕНИЯ
ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Зацепин В.В.

Исторически сложилось так, что первым методом оценки прочности тройниковых соединений, по-видимому, был метод компенсации [1, 2]. Этот метод, получивший широкое распространение в большинстве индустриальных стран [3, 4] основывается на компенсации площади сечения, изъятого при врезке штуцера из корпуса, металла площадью сечения избыточной толщины корпуса или прибавлением металла. При этом, в этой методике внутреннее давление является единственной учитываемой нагрузкой. Влияние этого подхода ощущается по сей день, оно отражено в соответствующих государственных и отраслевых стандартах.

Можно легко заметить, что такая методика не отражает ни один из параметров зоны сопряжения основной трубы и патрубка, поэтому в последующих работах авторы пытались в той или иной степени учесть различные факторы соединения труб.

Интересно также отметить, что на основании экспериментальных данных работ [5, 6, 7], В.В. Рождественский в своей работе [8] провел сравнение результатов, получаемых методом компенсации, со значениями, полученными в результате экспериментов. В итоге было обнаружено значительное расхождение между теоретическими и экспериментальными данными.

В то же время, аналитические методики расчета напряженного состояния радиально пересекающихся круговых цилиндрических оболочек отличаются громоздкостью вычислений и невысокой точностью получаемых результатов, и в еще меньшей степени отвечают современным требованиям.

Выходом в сложившейся ситуации можно считать использование метода конечных элементов (МКЭ), однако несмотря на распространение в настоящее время вычислительных программ, предназначенных для решения различных задач механики, таких как ЛИРА, КАСКАД, СПРИНТ, NASTRAN, ASKA, ANSYS, COSMOS/M и других, очевидна, наряду с очевидными достижениями, определенная ограниченность возможности применения МКЭ для решения практических задач в отсутствие экспериментальной проверки получаемых результатов. Очевидно, что точность результата расчета определяется в зависимости от адекватности построенной модели и точности математического аппарата, ее реализующего.

Поэтому необходимо отметить актуальность разработки методов анализа напряженного состояния тройниковых соединений, основанных на физическом базисе процесса развития напряжений в конструкциях.

В предлагаемой работе показаны результаты вычисления напряжения возникающего в тройниковом соединении труб путем интерпретации закона сохранения энергии для энергии деформации отдельных составляющих тройника.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА РАСЧЕТА.

Из основных положений теории упругости известно, что в теле, находящемся под действием сторонних сил, элементарные частицы, его составляющие, меняют свое положение относительно друг друга, в результате чего между ними появляются добавочные силы взаимодействия, оказывающие компенсирующее деформации влияние и уравнивающие действующие внешние силы. Очевидно, что работу, совершаемую внутренними силами в области прилегающей к какой-либо точке пространственного тела, можно определить как функцию от напряжений и деформаций в ее окрестности.

Для упругих тел и тех случаев, когда деформации лежат в области упругости и подчиняются закону Гука, что подразумевается при выполнении расчетов реальных технических объектов, работа, совершаемая внутренними силами упругости, без учета тепловых, магнитных и других сопутствующих явлений, значение которых однако пренебрежимо мало, полностью переходит в потенциальную энергию деформации и соответственно численно эквивалентна последней. В свою очередь правомерно распространять на случай упругой энергии те физические законы, которые справедливы для всех других видов энергии.

Исходя из положения фундаментального закона сохранения и превращения энергии, количество полной энергии изолированной системы материальных точек, находящейся под действием консервативных сил, т.е. сил, работа которых зависит только от начального и конечного положений, равно сумме кинетической и потенциальной энергии объектов, ее составляющих, есть величина постоянная.

Тройниковое соединение труб, находящееся под действием внутреннего давления или внешних нагрузок, очевидно, является механической системой, подверженной действию консервативных сил. Причем, можно считать, что эта система состоит из двух отдельных механических систем, а именно – индивидуально существующих труб, образующих единое соединение при их пересечении. Иными словами, полная энергия тройникового соединения будет равна сумме полной энергии основной трубы и полной энергии отвода.

Поскольку в подобной системе отсутствует такой компонент полной энергии, как кинетическая энергия, также очевидно, что сохранение энергии будет существовать в форме перераспределения потенциальной энергии в объеме материала конструкции. Таким образом, для соединения типа «тройник» это означает, что в зоне пересечения двух труб, находящихся под действием внешних и внутренних нагрузок, сосредоточена энергия, которая была бы распределена в материале труб, изъятом при их соединении (круглое в плане сверху отверстие в основной трубе и круглой формы срез в продольном плане у отвода), при условии сохранения без изменений системы действующих нагрузок.

На основании изложенных выше положений, можно сформулировать постулат, определяющий методику расчета напряженного состояния тройникового соединения через полную энергию деформации: энергия деформации, определяемая напряжением, превышающим по абсолютному значению номинальное напряжение, сосредоточенная в зоне концентрации напряжений, равна энергии деформации, которая в отсутствии этого концентратора была бы распределена в его объеме и определялась номинальным напряжением.

Таким образом, в случае равномерного распределения энергии деформации в отдельно существующих составных элементах, как например под действием внутреннего давления, количество полной энергии деформации в зоне соединения будет определяться, исходя из объема материала изъятого при соединении из каждой трубы, и удельной энергии деформации последних. При этом потенциальная энергия, сосредоточенная в элементарном объеме определяется как функция нормальных и касательных составляющих внутренних сил.

$$dU = 0,5dxdydz (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (1)$$

где σ_i – напряжение по оси i ;

ε_i – относительное удлинение по оси i ;

γ_{ij} – угол сдвига.

В главных напряжениях и удлинениях удельная потенциальная энергия деформации будет выражаться в виде:

$$U_{уд} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \quad (2)$$

и

$$U_{уд} = G \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right) \quad (3)$$

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга);

G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига);

μ – коэффициент Пуассона.

Данный подход позволяет оценить прочность конструкции с позиции энергетического метода и, помимо расчета, основанного на сравнении эквивалентного и допускаемого напряжений, позволяет производить анализ по средствам сопоставления с энергией активации процесса разрушения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА МАТЕРИАЛА, ИЗЪЯТОГО ПРИ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ ПРАВИЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.

Для того, чтобы получить зависимость для определения полной энергии деформации, необходимо вычислить объем изъятой из основной трубы и отвода части материала. Эту величину можно найти как разность объемов фигур, полученных путем пересечения цилиндров различных диаметров. В свою очередь, объем тела, образованного пересечением двух цилиндров, можно вычислить путем двойного интегрирования ограничивающей тело сверху функции по основанию такого цилиндрического тела:

$$V = \iint_D f(x, y) ds \quad (4)$$

где $f(x, y)$ – подынтегральная функция;

D – область интегрирования;

ds – элемент площади;

x, y – переменные интегрирования.

Определим объем пространственной фигуры, ограниченной цилиндрическими поверхностями $z = \pm\sqrt{R'^2 - y^2}$, $y = \pm\sqrt{r'^2 - x^2}$ и плоскостью $z=0$, где R' и r' – радиусы пересекающихся цилиндров, причем, для них выполняется соотношение $R' > r'$.

Поверхность, ограничивающая тело сверху, имеет уравнение $z = \pm\sqrt{R'^2 - y^2}$. Область интегрирования D получается как проекция на плоскость Oxy линии

пересечения цилиндра $y = \pm\sqrt{r'^2 - x^2}$ с ограничивающей тело сверху поверхностью и имеет форму окружности $y = \pm\sqrt{r'^2 - x^2}$.

Ввиду симметрии тела относительно плоскостей Oxy и Oyz , можно вычислить объем его четвертой части, расположенной в первом координатном угле. Этот объем равен двойному интегралу, распространенному по четверти окружности $x^2 + y^2 = r'^2$.

Однако в процессе вычисления возникает необходимость выразить в конечном виде через элементарные функции первообразную, выраженную в общем виде эллиптическим интегралом. Однако эллиптический интеграл как первого, так и второго рода, относится к так называемым неберущимся интегралам и не может быть вычислен аналитически.

Тем не менее, эти функции достаточно хорошо исследованы, и для них составлены таблицы значений при различных значениях входящего в них коэффициента, который в данном случае выражается отношением диаметров цилиндров $\kappa = \frac{r'}{R}$.

Формулу, выражающую зависимость объема пространственного тела, полученного при пересечении цилиндров разного диаметра, из выражения (4) можно получить для случая, когда квадрат коэффициента κ , являющегося отношением диаметров цилиндров, лежит в интервале $(0; 1)$, если принять во внимание тот факт, что значения эллиптических интегралов первого и второго рода для различных величин κ протабулированы.

Учитывая, что эллиптический интеграл первого рода имеет вид:

$$K(\phi, \kappa) = \int_0^{\phi} \frac{dy}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 y}} \quad (5)$$

А эллиптический интеграл второго рода выражается как:

$$E(\phi, \kappa) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 y} dy \quad (6)$$

Обозначив внутренние диаметры труб как r и R , а толщины стенок соответственно h и H , находим искомый интегральный объем, который будет определяться как разность объемов фигур, образованных пересечением цилиндров с радиусами $(R + H)$ и $(r + h)$, а также R и r .

$$V = \frac{4}{3}(R+H)\left[\left((R+H)^2 + (r+h)^2\right)E(\kappa) - \left((R+H)^2 - (r+h)^2\right)K(\kappa)\right] - \frac{4}{3}R\left[\left(R^2 + r^2\right)E(\kappa) - \left(R^2 - r^2\right)K(\kappa)\right] \quad (7)$$

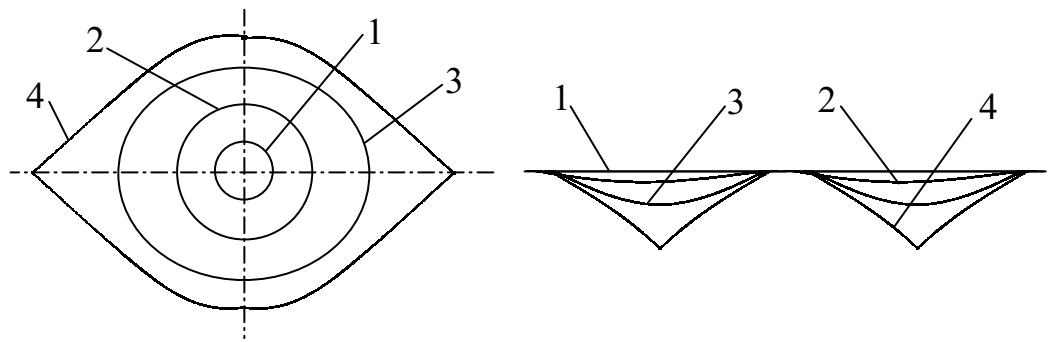
где R – внутренний радиус основной трубы;

r – внутренний радиус отвода;

H – толщина стенки трубы;

h – толщина стенки отвода.

Очевидно, что выражение (7) является весьма громоздким и, как следствие, ограниченно применимым для практических расчетов. Поэтому очевидно, что для получения формул вычисления расчетных максимальных напряжений в тройниковом соединении труб, необходимы зависимости определения объема изымаемого при соединении труб материала, представленные в более простой форме и не зависящие от наличия ранее вычисленных значений функций.



1 – линия пересечения при $\kappa = \frac{1}{4}$; 2 – линия пересечения при $\kappa = \frac{1}{2}$;

3 – линия пересечения при $\kappa = \frac{3}{4}$; 4 – линия пересечения при $\kappa = 1$

Рисунок 1 – Развертка на плоскость линии пересечения
двух радиально пересекающихся цилиндров

Получить значение величины объема тела, заключенного между четырьмя цилиндрическими оболочками, оси симметрии которых попарно совпадают, а с другими и пересекаются под прямым углом, можно путем разложения интеграла (4) в ряд. Однако получаемая в результате функция является ненамного более простой в восприятии, хотя и не зависит от табулированных значений. Поэтому очевидным решением задачи является аппроксимация развертки линии пересечения цилиндрических оболочек на плоскость с помощью алгебраических функций с

последующим вычислением интегральной площади и переходу от них к объему путем умножения на толщину стенки оболочки.

На рисунке 1 представлена развертка линий пересечения двух цилиндров в зависимости от отношения κ . Очевидно, что для κ , лежащего в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$, приемлема аппроксимация линии пересечения плоской окружностью, для $\kappa \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ – аппроксимация эллипсом и функцией вида $y = Ax^2 + C$, а для $\kappa \in \left(\frac{3}{4}; 1\right]$ – функцией вида $y = Ax^2 + Bx + C$.

В результате были получены следующие зависимости для различных случаев.

В случае, когда отношение диаметров κ не превышает 0,5:

$$V = \pi H r^2 \quad (8)$$

Для соединения, где $\kappa \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$:

$$V_1 = \frac{\pi^2 H r R}{180} \arcsin \frac{r}{R} \quad (9)$$

$$V_2 = 4\pi h r \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right) \quad (10)$$

В случае, когда отношение κ лежит в пределах $\left(\frac{3}{4}; 1\right]$:

$$V_1 = \frac{\pi H R r (1 + 2\sqrt{2})}{270} \arcsin \frac{r}{R} \quad (11)$$

$$V_2 = \frac{\pi r h}{3} \left(4\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{2}} - 5\sqrt{R^2 - r^2} + R \right) \quad (12)$$

где V_1 – объем выреза в основной трубе;

r – внутренний радиус отвода;

V_2 – объем выреза в отводе.

R – внутренний радиус основной трубы;

h – толщина стенки отвода;

H – толщина стенки основной трубы.

РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ТРОЙНИКОВОМ СОЕДИНЕНИИ ТРУБ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ.

Итоговые расчетные формулы получаются путем объединения выведенных физических и геометрических зависимостей для правильных цилиндрических оболочек и их соединения.

Согласно [9, 10], в тонкостенной цилиндрической оболочке, находящейся под действием внутреннего давления, $\sigma_3=0$, а остальные главные напряжения определяются как:

$$\sigma_1 = \frac{R_c P}{h_c} \quad (13)$$

и

$$\sigma_2 = \frac{R_c P}{2h_c} \quad (14)$$

При этом σ_1 является кольцевым напряжением, а σ_2 – осевым напряжением.

При подстановке формул (13), (14) в выражение (2) получается зависимость удельной потенциальной энергии деформации тонкостенной цилиндрической оболочки от внутреннего давления:

$$U_{уд} = \frac{R_c^2 P^2 (5 - 4\mu)}{8Eh_c^2} \quad (15)$$

где R_c – радиус срединной поверхности оболочки;

P – внутреннее давление;

h_c – толщина стенки оболочки;

μ – коэффициент Пуассона;

E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

С учетом формулы (15) можно определить энергию деформации, распределенную в материале цилиндрических оболочек, подлежащем удалению в случае образования радиального соединения, при этом, в следствие того, что оболочки считаются тонкостенными, т.е. толщина стенки составляет менее 10% от величины внутреннего диаметра, принимается, что радиус срединной поверхности равен внутреннему радиусу оболочки:

$$U = V_1 \frac{R^2 P^2 (5 - 4\mu)}{8EH^2} + V_2 \frac{r^2 P^2 (5 - 4\mu)}{8Eh^2} \quad (16)$$

Поскольку зависимость энергии деформации от эквивалентного напряжения определяется как функция:

$$U_{уд} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (17)$$

То расчетное максимальное дополнительное напряжение, возникающее в тройниковом соединении от внутреннего давления:

$$\sigma_{дон} = K \sqrt{\frac{2UE}{V'}} \quad (18)$$

где K – коэффициент, характеризующий долю от аккумулированной энергии деформации, которая определяет максимальное расчетное напряжение, а V' – объем материала, в котором распределяется дополнительная энергия.

Тогда путем последовательной подстановки в выражение (18) формул (8), (9), (10), (11), (12), с учетом того, что энергия приходится на единицу объема, получаем зависимости для расчета тройникового соединения.

При $\kappa \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$:

$$\sigma_p = \frac{PR}{H} + KPR \sqrt{\frac{r(5-4\mu)}{8H}} \quad (19)$$

Для случая $\kappa \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$:

$$\sigma_p = \frac{PR}{H} + KP \sqrt{\frac{(5-4\mu)}{4H} \left(\frac{\pi R^3}{360H} \arcsin \frac{r}{R} + \frac{2r^2(R - \sqrt{R^2 - r^2})}{h} \right)} \quad (20)$$

В случае $\kappa \in \left(\frac{3}{4}; 1\right]$:

$$\sigma_p = \frac{PR}{H} + KP \sqrt{\frac{(5-4\mu)}{8H} \left(\frac{R^3(1+2\sqrt{2})}{270H} \arcsin \frac{r}{R} + \frac{r^2}{3h} \left(4\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{2}} - 5\sqrt{R^2 - r^2} + R \right) \right)} \quad (21)$$

По имеющимся экспериментальным данным [11] (таблица 1) определяется значение коэффициента K , который равен 10,88 и справедлив для всех расчетных зависимостей (18) – (21).

Таблица 1 – Данные эксперимента

R, см	H, см	r, см	h, см	E, кг/см ²	P, атм	σ_{\max} , кг/см ²
12,7	0,254	6,35	0,127	$2,1 \cdot 10^6$	3,515	1800

Выводы

1. В работе установлены основные физические положения, определяющие методику расчета радиального соединения правильных цилиндрических оболочек, на базе гипотезы о сохранении энергии деформации в тройниковом соединении, находящемся под воздействием консервативных сил.

2. Проведено исследование геометрии соединения. Отмечена невозможность получения точного значения объема материала, устранимого из оболочек при их соединении вследствие недопустимости вычисления эллиптического интеграла.

3. Решена задача вычисления объемов вырезов в основной трубе и отводе путем аппроксимации развертки на плоскость контура выреза функциями второго порядка, с последующим вычислением интегральной площади и объема, отдельно для различных вариантов отношения диаметров пересекающихся оболочек.

4. Получены расчетные зависимости, предназначенные для определения максимального расчетного напряжения, возникающего в зоне радиального сопряжения двух правильных цилиндрических оболочек, находящихся под действием внутренних нагрузок, для различных случаев соотношения радиусов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расчет и проектирование систем трубопроводов. Справочная книга. / Под ред. Камерштейна А.Г., Рождественского В.В.– М.: Гостоптехиздат, 1949.– 305 с.
2. Петров И.П., Камерштейн А.Г., Долгов В.К. Расчет стальных напорных трубопроводов на прочность.– М.: Госстройиздат, 1955.– 341 с.
3. Камерштейн А.Г., Рождественский В.В., Ручимский М.Н. Расчет трубопроводов на прочность. Справочная книга.– М.: Недра, 1969.– 440 с.
4. Справочник по проектированию электрических станций и сетей. Разд. IX. Механические расчеты трубопроводов.– М.: Теплоэлектропроект, 1959.– 62 с.
5. Rodabaugh E.C., George H.H. Design and strength of welded pipe line branch connections // Journal of the Pipeline Division, 1957.– P. 58-63.
6. Abraham E.D., McClure G.M. How stresses are affected by branch connections // Pipe line Industry, 1955.– September.– P. 48-54.
7. Everett F.L., Cutchan A. Investigations of stress conditions in a full-size welded branch connection // Transactions of the ASME, 1938.– July.– P. 81-93.
8. Рождественский В.В. О прочности сварных тройников // Вопросы прочности трубопроводов и резервуаров: Сб. трудов ВНИИСТ.– М., 1960.– Вып. X.– С. 96-109.
9. Вихман Г.Л., Бабицкий И.Ф., Вольфсон С.Н. Расчет и конструирование нефтезаводской аппаратуры. – М.: Гостоптехиздат, 1953.– 287 с.
10. Вихман Г.Л., Круглов С.А. Основы конструирования аппаратов и машин нефтеперерабатывающих заводов. – М.: Гостоптехиздат, 1962.– 295 с.
11. Corum J.M., Greenstreet W.L. Experimental elastic stress analysis of cylinder-to-cylinder shell models and comparisons with theoretical predictions // Prepr. International Conference Structure Mechanical Reactor Technology. – Berlin, 1971.– Vol. 3.– Part G.– P. 106-125.