

5

Коэффициент вытеснения

Определения для коэффициентов отдачи, вытеснения и охвата в уравнении (2.5-5) применимы к произвольному химическому компоненту, но они почти всецело применимы к вытеснению нефти и газа. Так как коэффициент вытеснения и коэффициент охвата перемножаются, они в равной степени важны для величины коэффициента отдачи и, следовательно, нефтеотдачи. В Главе 6 мы рассматриваем коэффициент охвата по объему; в этой главе мы приводим основные концепции коэффициента вытеснения.

По большей части, мы ограничиваем наше обсуждение рассмотрением коэффициента вытеснения нефти, основанном на решениях уравнения (2.4-3) движения отдельных фаз (в многофазовом потоке). Мы применяем эти уравнения для рассмотрения процессов вытеснения в одномерной, однородной, изотропной, проницаемой среде. Таким образом, результаты применимы наиболее реалистично к процессам вытеснения в лабораторных условиях, которые являются традиционным способом экспериментального определения коэффициента вытеснения. Конечно, эти результаты не позволяют оценить коэффициент отдачи в условиях трехмерного, нелинейного потока без поправок на коэффициент охвата по объему и коэффициент вытеснения с учетом разницы в масштабе.

5-1 Определения

Если предположить, что плотность нефти постоянная величина, определение коэффициента вытеснения для нефти будет следующим:

$$E_D = \frac{\text{Количество вытесненной нефти}}{\text{Количество нефти, с которым контактировал вытесняющий агент}} \quad (5.1-1)$$

E_D находится между 0 и 1. На скорость, с которой E_D стремится к 1, сильно влияют исходные условия, вытесняющий агент и количество вытесняющего агента. Жидкость, порода и свойства жидкости и породы также влияют на E_D . Если вытеснение происходит таким образом, что вытесняющий агент контактирует со всей нефтью, первоначально присутствующей в среде, коэффициент охвата по объему будет равен единице, и E_D становится коэффициентом отдачи E_R .

Тогда, из уравнения (2.5-4)

$$E_D = 1 - \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_{2I}} \quad (5.1-2)$$

для несжимаемой однокомпонентной нефтяной фазы, текущей в несжимаемой проницаемой среде. Уравнение (5.1-2) свидетельствует о том, что E_D пропорционально средней нефтенасыщенности в среде. Для случаев, когда нефть может встречаться в нескольких фазах, или когда не только нефть может существовать в углеводородной фазе, мы должны использовать общее определение (уравнение 2.5-5b).

5-2 Несмешивающееся вытеснение

Фактически все наше понимание процессов повышения нефтеотдачи начинается с понимания процесса вытеснения одной жидкости второй несмешивающейся жидкостью. Частный случай вытеснения нефти водой был впервые решен Баклеем и Левереттом (1942), позднее был расширен Уэлджем (1952). В этом разделе мы развиваем теорию Баклея – Леверетта таким же образом, как это было сделано в оригинальной статье с несколькими последующими ссылками (Коллинз, 1976; Крейг, 1971; Дэйк, 1978).

В случае изотермического потока нефти и воды в двух несмешивающихся, несжимаемых фазах в одномерной проницаемой среде, уравнения сохранения массы Таблицы 2-2 принимают вид:

$$\phi \frac{\partial S_1}{\partial t} + u \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \quad (5.2-1)$$

при течении в направлении положительного x , как мы обсуждали в Главе 2. В этом уравнении f_1 представляет собой движение водной фазы в многофазовом потоке

$$f_1 = \frac{u_1}{u} = \frac{\lambda_{r1}}{\lambda_{r1} + \lambda_{r2}} \cdot \left(1 - \frac{k \cdot \lambda_{r2} \Delta \rho \cdot g \cdot \sin \alpha}{u} \right) \quad (5.2-2)$$

в отсутствии капиллярного давления. В уравнении (5.2-2) α – это угол падения, определяемый как положительная величина, когда угол замеряется против часовой стрелки от горизонтали, а $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ – это разность плотностей водной и нефтяной фаз.

Выбор S_1 в качестве зависимой переменной в уравнении (5.2-1) является, в значительной степени, условным; мы могли бы с такой же легкостью выбрать S_2 , т.к. $S_2 + S_1 = 1$, и $f_2 + f_1 = 1$. Важным моментом здесь является то, что в отсутствии капиллярного давления f_1 определяется исключительно как функция S_1 только при помощи соотношений относительных проницаемостей $\lambda_{r1} = k_{r1}/\mu_1$ и $\lambda_{r2} = k_{r2}/\mu_2$, рассматриваемых в Разделе 3-3.

В действительности, т.к. форма кривой $f_l - S_l$ оказывается главным фактором в определении характера вытеснения, мы ненадолго отвлечемся от темы, чтобы рассмотреть каким образом условия течения влияют на эту кривую.

Кривые движения отдельных фаз жидкости в многофазовом потоке

Если мы введем экспоненциальную форму кривых относительной проницаемости нефти и воды (уравнение 3.3-4) в уравнение (5.2-2), мы получим

$$f_i = \frac{1 - N_g^0 \cdot (1 - S)^{n_2} \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{(1 - S)^{n_2}}{M^0 \cdot S^{n_1}}} \quad (5.2-3a)$$

где

$$S = \frac{S_1 - S_{1r}}{1 - S_{2r} - S_{1r}} = \text{приведенная водонасыщенность} \quad (5.2-3b)$$

и

$$M^0 = \frac{k_{r1}^0 \cdot \mu_2}{\mu_1 \cdot k_{r2}^0} = \text{соотношение подвижностей воды и нефти в конечной точке} \quad (5.2-3c)$$

$$N_g^0 = \frac{k \cdot k_{r2}^0 \Delta \rho \cdot g}{\mu_2 \cdot u} = \text{гравитационное число} \quad (5.2-3d)$$

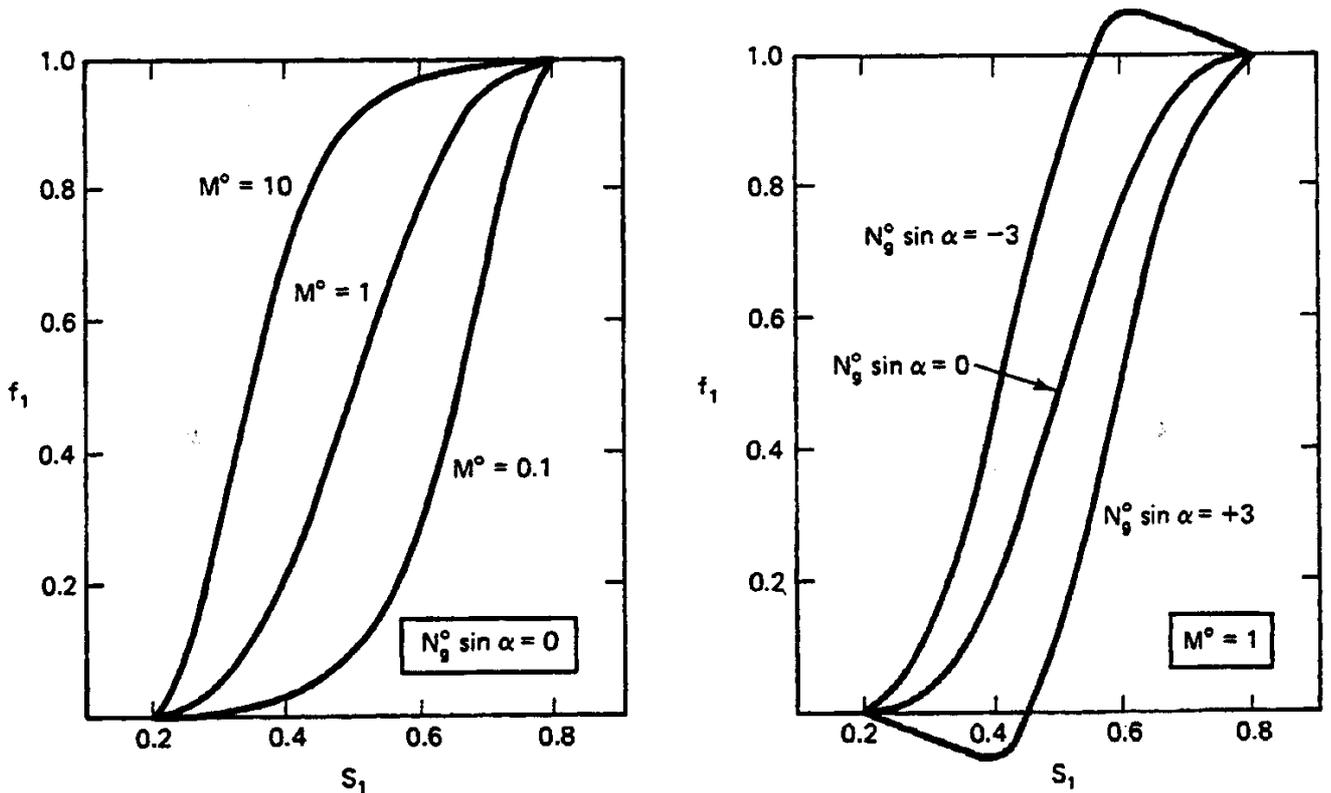
N_g^0 - это отношение перепадов давления под действием гравитационных и вязкостных сил, исходя их относительной вязкости нефти в конечной точке. В виде уравнения (5.2-3a), f_l параметрически зависит от M^0, N_g^0, α и формы кривых относительных проницаемостей (n_1 и n_2). Кривая $f_l - S_l$ чувствительна ко всем этим факторам, но, как правило, наибольшее значение имеют M^0 и N_g^0 . На Рис.5-1 представлены кривые $f_l - S_l$ для различных значений M^0 и $N_g^0 \sin \alpha$ при заданных значениях остальных параметров ($S_{1r} = 0.2, S_{2r} = 0.2, n_1 = n_2 = 2$). S-образные кривые имеют точку перегиба, которая меняется в зависимости от M^0 и $N_g^0 \sin \alpha$. Кривизна всех кривых становится более отрицательной по мере того, как M^0 возрастает или $N_g^0 \sin \alpha$ убывает. Кривые, у которых f_l меньше 0 или больше 1, являются правильными с физической точки зрения. Это условие означает поток, в котором гравитационные силы так сильны, что течение происходит в отрицательном направлении x (вода течет в отрицательном направлении x при $f_l < 0$). В Разделе 3-3 мы показали, что изменение смачиваемости проницаемой среды с гидрофильной на гидрофобную вызывало увеличение k_{r1}^0 и уменьшение k_{r2}^0 . Таким образом, при постоянных фазовых вязкостях превращение среды в более гидрофобную равноценно, с качественной точки зрения, увеличению M^0 . Но при заданных кривых относительных проницаемостей, увеличение μ_1 или уменьшение μ_2 вызывает уменьшение M^0 .

Решение уравнения Баклея – Леверетта

Возвращаясь теперь к уравнению (5.2-1), чтобы рассчитать E_D , мы находим решения $S_1(x, t)$, с учетом исходных и граничных условий

$$S_1(x, 0) = S_{1l}, \quad x \geq 0 \quad (5.2-4a)$$

$$S_1(0, t) = S_{1l}, \quad t \geq 0 \quad (5.2-4b)$$



(a) Изменяющиеся отношения подвижностей в конечной точке	(b) Изменяющиеся гравитационные числа
--	---------------------------------------

Рис.5-1 Кривые движения отдельных фаз жидкостей в многофазном потоке при $m = n = 2$ и $S_{1r} = S_{2r} = 0.2$

В заводнениях, осуществляемых на кернях, потоку, поступающему в керн, обычно задаются условия ($x = 0$), так что мы можем заменить Уравнение (5.2-4b) на

$$f_1(0, t) = f_1(S_1(0, t)) = f_{1J} = f_1(S_{1J}), \quad t \geq 0 \quad (5.2-4c)$$

Это уравнение показывает, что f_1 является функцией x и t только из-за своей зависимости от S_1 . Определение, используемое в данном случае, зависит от конкретного применения. Условия (уравнения 5.2-4) так же имеют удобную геометрическую интерпретацию в пространстве xt , т.к. в точке $t = x = 0$ существуют все значения S_1 между S_{1I} и S_{1J} . В задаче Баклея – Леверетта за S_{1I} и S_{1J} обычно берутся S_{1r} и $1 - S_{2r}$, соответственно.

Для большего обобщения преобразуем уравнения (5.2-1) и (5.2-4) в нижеприведенные безразмерные формы:

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial t_D} \right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial S_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_D} \right) = 0 \quad (5.2-5a)$$

$$S_1(x_D, 0) = S_{1I}, \quad x_D \geq 0 \quad (5.2-5b)$$

$$S_1(0, t_D) = S_{1I}, \quad t_D \geq 0 \quad (5.2-5c)$$

где безразмерные переменные x_D и t_D представляют собой

$$x_D = \frac{x}{L} = \text{безразмерная координата места} \quad (5.2-6a)$$

$$t_D = \int_0^t \frac{u dt}{\phi L} = \text{безразмерное время} \quad (5.2-6b)$$

L – это общий размер макроскопической проницаемой среды в направлении x . В этих уравнениях u может быть функцией времени, но не координаты места из-за предположения несжимаемости. Кроме того, df_i/dS_i является полной производной, т.к. f_i является функцией только S_i . Введение безразмерных переменных уменьшает количество параметров в задаче с четырех (ϕ , u , S_{11} и S_{12}) в уравнениях (5.2-1) и (5.2-4) до двух (S_{11} и S_{12}). Мы могли бы еще уменьшить это количество, переопределив зависимую переменную S_1 (см. Пример 5А).

Безразмерное время может быть так же выражено как:

$$t_D = \int_0^t \frac{A \cdot u dt}{\phi \cdot A \cdot L} = \int_0^t \frac{q dt}{V_p} \quad (5.2-7)$$

где A – это площадь поперечного сечения одномерной среды в направлении, перпендикулярном оси x , q – объемная скорость потока, а V_p – поровый объем. t_D – общий объем жидкости, закачанный до времени t , разделенный на суммарный поровый объем среды. В принципе V_p хорошо определяется даже при геометрически неправильной форме, так что t_D является масштабной переменной фактически в каждом применении. Фактически t_D является основной переменной, применяемой для пересчета лабораторных условий в масштабе промысла. Она использовалась с широким многообразием определений для определения эталонного объема V_p (см. Таблицу 5-1). Численные значения t_D часто даются как «доля порового объема» или просто «поровый объем»; таким образом, ее легко спутать с V_p – фактическим поровым объемом, который имеет единицы измерения L^3 (t_D , конечно же, не имеет единиц измерения).

Мы ищем решение для уравнения (5.2-5) в виде $S_1(x_D, t_D)$. S_1 может быть записано в виде полного дифференциала

$$dS_1 = \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_D} \right)_{t_D} dx_D + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t_D} \right) dt_D \quad (5.2-8)$$

Таблица 5-1 Таблица различных определений для безразмерного времени

Эталонный объем	Применение
Площадь \times длина \times пористость	Заводнения на кернях
Площадь \times мощность \times пористость ($A\phi h = V_p =$ суммарный поровый объем)	Общего характера
$V_p \times$ коэффициент охвата по объему ($V_p \times E_v =$ поровый объем, доступный для заводнения = V_{PF})	Мицеллярные полимерные заводнения
$V_{PF} \times \Delta S_2 =$ подвижный поровый объем	Обычные заводнения
$V_{PF} \times S_{21} =$ углеводородный поровый объем (HCPV)	Смешивающиеся заводнения

Примечание: $t_D = \frac{\text{Суммарный объем закачанных жидкостей}}{\text{эталонный объем}}$ } *сообразные единицы измерения*

из которого следует, что скорость v_{S_1} точки с постоянной насыщенностью S_1 в пространстве $x_D t_D$ равна

$$\left(\frac{dx_D}{dt_D} \right)_{S_1} = - \frac{(\partial S_1 / \partial t_D)_{x_D}}{(\partial S_1 / \partial x_D)_{t_D}} \equiv v_{S_1} \quad (5.2-9)$$

v_{S_1} - это «удельная» скорость насыщенности S_1 , т.к. она была нормализована промежуточной скоростью основной массы жидкости u/ϕ . Она безразмерная. Вы можете увидеть это, преобразовав уравнение (5.2-9) назад к безразмерным величинам, используя определения (уравнения 5.2-6).

Исключая каждое производное в уравнении (5.2-9), путем использования уравнения (5.2-5а), получаем

$$v_{S_1} = \frac{df_1}{dS_1} = f_1' \quad (5.2-10)$$

Это уравнение свидетельствует, что удельная скорость постоянной насыщенности S_1 равна производной кривой движения отдельных фаз в многофазном потоке при этой насыщенности. В безразмерном виде уравнение (5.2-10) является уравнением Баклея – Леверетта. Т.к. все насыщенности между S_{1I} и S_{1J} первоначально находятся в начале координат в пространстве x_D-t_D , и v_{S_1} определяется при постоянной величине S_1 , координата места любой насыщенности $S_{1I} \leq S_1 \leq S_{1J}$ при заданном t_D равна

$$x_D|_{S_1} = \frac{df_1}{dS_1} \Big|_{S_1} t_D = f_1'(S_1) \cdot t_D \quad (5.2-11)$$

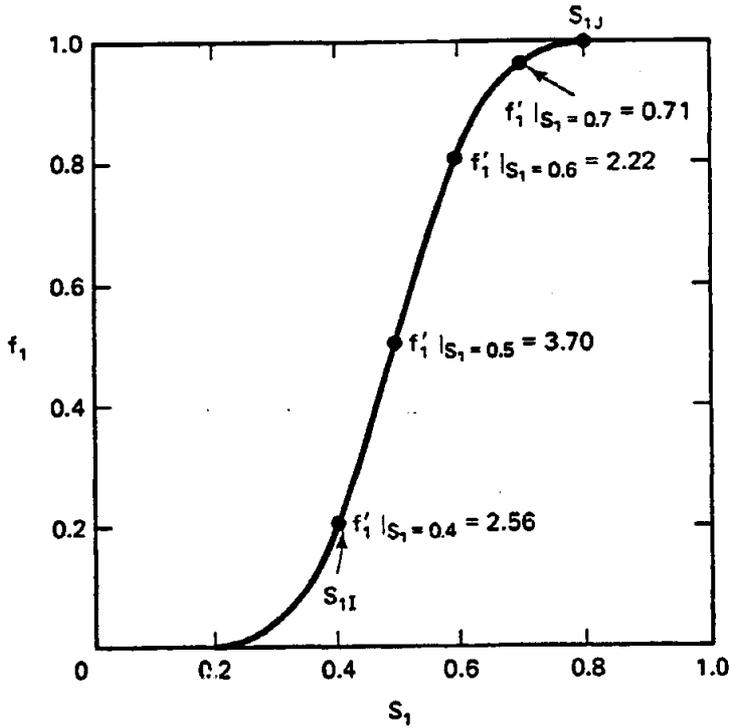
где мы включаем оценочные символы, чтобы способствовать разъяснению последующего вывода. Уравнение (5.2-11) является решением задачи одномерного вытеснения нефти водой; выбрав несколько значений S_1 между S_{1I} и S_{1J} , мы можем построить $S_1(x_D, t_D)$. На Рис.5.2(а) показано построение одной из кривых изменения доли фазы в многофазном потоке, приведенных на Рис.5-1. За исключением относительно простых случаев (см. Пример 5Е), эта зависимость (уравнение 5.2-11), как правило, не является явно разрешимой для $S_1(x_D, t_D)$.

Формирование импульса

На Рис.5-2(а) показана также вызывающая замешательство тенденция S-образной кривой f_1-S_1 давать решения, которые имеют три значения S_1 при одних и тех же значениях x_D и t_D . На Рис.5-2(б) это происходит при $0.64 < x_D < 0.94$. Конечно, такие тройные значения являются теоретическими, хотя математически они полностью обоснованы. Тройные значения – это результат скорости насыщения v_{S_1} , возрастающей в некоей области насыщения ($S_{1I} < S_1 < S_1'$ на Рис.5-2) по мере изменения S_1 от своего исходного (ниже по течению) значения до конечного (выше по потоку) значения.

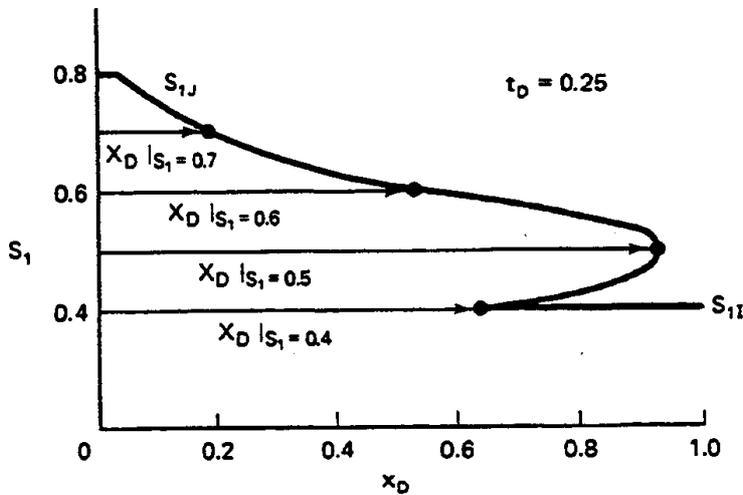
Мы исключаем область тройных значений, обратившись к формированию *импульсов* - скачкообразным изменениям в физическом количестве, как, например, давление (как в случае звукового удара), концентрация или в данном случае - насыщенность. Импульсы являются характеристическими особенностями гиперболических уравнений, одним из классов которых являются уравнения сохранения, свободные от рассеивания. Строго говоря, импульсы не присутствуют в природе, т.к. всегда имеется в наличии какое-то рассеивание (дисперсия, диффузия, капиллярное давление, сжимаемость и теплопроводность), что препятствует их формированию. Когда такие эффекты присутствуют, импульсы распространяются вокруг импульсного фронта, но положение импульса неизменно. Несмотря на это ограничение,

импульсы играют центральную роль в теории движения отдельных фаз в многофазном потоке,



где

(a) Углы наклона кривой изменения доли фазы в многофазном потоке

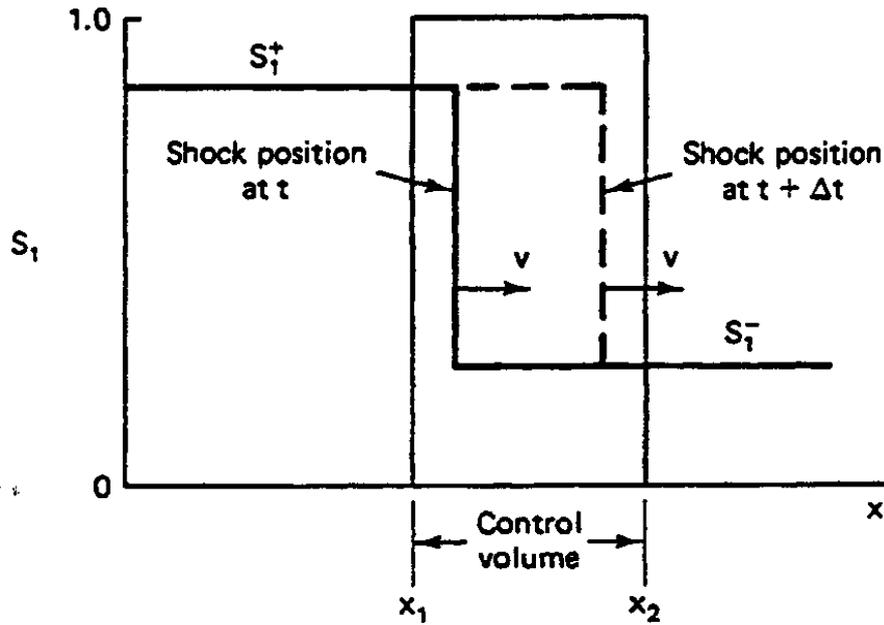


(b) Соответствующий профиль насыщенностей

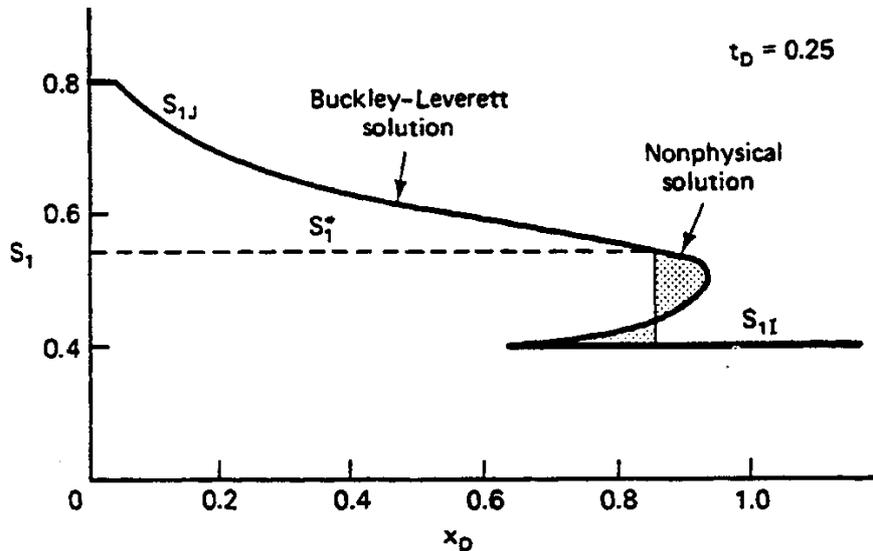
Рис.5-2 Построение $S_1(x_D, t_D)$ по Баклею - Леверетту

рассеивающие действия не учитываются, и описывают многие фактические потоки с достаточно хорошим приближением.

Чтобы рассчитать скорость и величину импульса, мы преобразуем дифференциальные уравнения этой главы в разностные уравнения. В общих чертах мы проделаем это в Разделе 5-4; здесь мы ограничимся проблемой вытеснения нефти водой, к рассмотрению которой мы уже приступили. Парадоксально, мы обнаруживаем, что расчеты производить значительно легче, когда формируются импульсы. На Рис.5-3(a) показан импульс водонасыщенности, движущийся слева направо. Водонасыщенность впереди импульса составляет S_1^- (вниз по потоку), а водонасыщенность позади импульса составляет S_1^+ (вверх по потоку).



(a) Схематическое изображение материального баланса вокруг импульса



(b) Профиль насыщения для кривой изменения доли фазы в многофазном потоке, приведенной на Рис.5-2(a)

Рис.5-3 Профили водонасыщенностей при наличии импульсов

Величина $\Delta S_1 = S_1^+ - S_1^-$ - это скачок насыщенности в импульсе. Суммарный водный баланс в управляющем объеме, который содержит импульс во временном интервале Δt , составляет:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Объем воды,} \\ \text{присутствующей в } t + \Delta t \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Объем воды,} \\ \text{присутствующей в } t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Объем воды} \\ \text{вытекающей во время } \Delta t \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Объем воды} \\ \text{вытекающей в } \Delta t \end{array} \right)$$

$$[(v(t + \Delta t) - x_1) S_1^+ + (x_2 - v(t + \Delta t)) S_1^-] A\phi - [(vt - x_1) S_1^+ + (x_2 - vt) S_1^-] A\phi = [f_1(S_1^+) - f_1(S_1^-)] \int_t^{t+\Delta t} q dt$$

После некоторых сокращений мы получаем удельную скорость импульса

$$v_{\Delta S_1} = \frac{f_1(S_1^+) - f_1(S_1^-)}{S_1^+ - S_1^-} \equiv \frac{\Delta f_1}{\Delta S_1} \quad (5.2-12)$$

Чтобы включить формирование импульса в задачу вытеснения нефти водой, рассмотрим профиль насыщенности, содержащий тройное значение в какой-то области, и содержащий одно значение еще где-нибудь (Рис.5-3б). Вообще какая-то насыщенность S_1^* отметит конец области сплошной водонасыщенности и начало импульса. Эта насыщенность должна одновременно удовлетворять условиям уравнений (5.2-10) и (5.2-12); уравнение (5.2-10) дает скорости S_1 больше, чем скорости S_1^* , а уравнение (5.2-12) дает скорости S_1 меньше, чем скорости S_1^* . Равенство между уравнениями (5.2-10) и (5.2-12) дает следующее уравнение для S_1^* :

$$f_1' \Big|_{S_1^*} = \frac{f_1(S_1^*) - f_1(S_{1I})}{S_1^* - S_{1I}} \quad (5.2-13)$$

где мы приняли $S_{1I}^- = S_{1I}$ в уравнении (5.2-12). Уравнение (5.2-13) поддается графическому решению, т.к.

$$f_1 - f_1(S_{1I}) = m \cdot (S_1 - S_{1I}) \quad (5.2-14)$$

это уравнение прямой линии с углом наклона m , проходящей через точку (f_{1I}, S_{1I}) на графике изменения доли фазы в многофазном потоке. Если $m = f_1' / s_1$, то m является углом наклона кривой изменения доли фазы в многофазном потоке при S_1^* . Сравнивая уравнение (5.2-14) с уравнением (5.2-13), видим, что S_1^* находится на касательной прямой линии, проходящей через точку (f_{1I}, S_{1I}) , к кривой изменения доли фазы в многофазном потоке. На Рис.5-4 схематически показано это построение. Угол наклона этой прямой линии является удельной скоростью импульса.

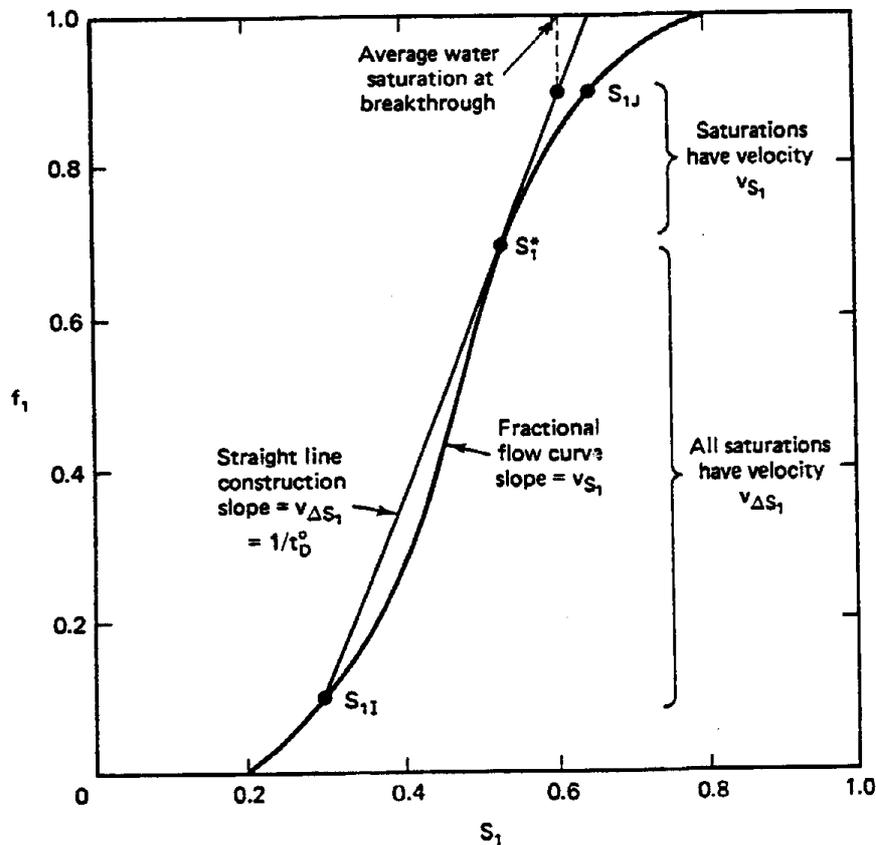


Рис.5-4 Схематическое изображение построения импульса

Сам импульс является скачкообразным изменением в насыщенности от S_{II} до S_1^* при $x_D = v_{\Delta S_1} t_D$, как показывает Рис.5-3(b). Насыщенность S_1^* не та же, что S_1' (Рис.5-2), эта насыщенность, имеющая самое большое значение v_{S_1} . S_1^* - это насыщенность, чья координата места требует, чтобы рабочая площадь между математическим решением и физическим решением (затененная область на Рис.5-3(b)) была равна нулю. Для этого требуется, чтобы импульс сохранял материальный баланс. При таком построении все скорости насыщения монотонно (хотя не непрерывно) убывают вверх по потоку. На Рис.5-3(b) показаны результаты полного построения. Конечный профиль насыщенности иногда называют профилем неплотного поршня.

Классификация волн

Прежде, чем перейти к дальнейшему развитию этой теории и ее рассмотрению применительно к процессам повышения нефтеотдачи, мы дадим определение еще нескольким терминам, которые будут использоваться при последующем обсуждении. Эти определения имеют большое значение для интерпретации графиков x_D-t_D , которые дают графическое решение $S_1(x_D, t_D)$.

Мы рассматриваем вопрос, как рассчитать водонасыщенность в виде функции местоположения и времени в вытеснениях нефти водой. График зависимости насыщенности или концентрации от времени при заданном местоположении является *характеристикой* изменения насыщенности во времени. Если заданное местоположение на таком графике находится на выходном конце проницаемой среды, это – характеристика *выходящего потока*. Графики зависимости насыщенности от местоположения при заданном времени являются *профилями* насыщенности. Рис.5-2(b) представляет собой профиль водонасыщенности. Изменения в насыщенности в зависимости от времени и местоположения являются *волнами* насыщенности. Таким образом, предыдущий вывод оценивает скорость распространения волн через проницаемую среду.

Важным и обобщающим аспектом нашего осмысления процессов вытеснения при повышении нефтеотдачи является изучение и определение характеристик количества и типов волн, которые они образуют. В зависимости от особенности распространения, волны можно классифицировать по четырем категориям.

1. Волна, которая становится более рассеянной при распространении, является *незаостряющейся*, разреженной или распространяющейся волной. Когда происходят такие волны, скорость распространения обычно гораздо больше, чем скорость, обусловленная рассеиванием.
2. Волна, которая становится менее рассеянной при распространении, является *заостряющейся* волной. При отсутствии рассеивания эти волны станут импульсами даже в том случае, если исходный профиль насыщенности является рассеянным. В присутствии рассеивания эти волны будут асимптотически стремиться к условию *постоянной конфигурации* (см. Раздел 5-3).
3. Волна, которая обладает особенностью, как распространяться, так и заостряться, является *смешанной*. Волна водонасыщенности, определенная методом Баклея – Левертта, представленная на Рис.5-2(b), является смешанной, будучи заостряющейся волной при $S_{II} < S_1 < S_1^*$ и распространяющейся волной при $S_1^* < S_1 < S_{II}$.
4. Волна, которая не распространяется и не заостряется при распространении, является *индифферентной*. При отсутствии рассеивания индифферентные волны проявляются в виде импульсов.

Подвести итог этого поведения можно путем определения безразмерного смешивания или переходной зоны Δx_D . Это часть всей длины системы, которая лежит между произвольными пределами насыщенностей в заданное время. Мы принимаем пределы насыщенностей равными 0.1 и 0.9 от диапазона исходных и закачанных насыщенностей

$$\Delta x_D(t_D) = x_D|_{S_{0,1}} - x_D|_{S_{0,9}} \quad (5.2-15a)$$

где

$$S_{0,1} = 0.1 \cdot (S_{1,J} - S_{1,I}) + S_{1,I} \quad (5.2-15b)$$

$$S_{0,9} = 0.9 \cdot (S_{1,J} - S_{1,I}) + S_{1,I} \quad (5.2-15c)$$

Точная величина пределов не имеет значения для поведения зоны смешивания. Классификация волны, которая может быть переформулирована по мере того, как Δx_D возрастает во времени для распространяющихся волн, убывает для заостряющихся волн, и либо возрастает, либо убывает для смешанных волн в зависимости от того превышает ли импульс волны насыщенности, применявшийся для определения Δx_D . Концепция зоны смешивания имеет общее применение при классификации явлений смешивания в разнообразных процессах вытеснения.

Окончательным определением, относящимся к разработке Баклея – Леверетта, является годограф. Эти диаграммы представляют собой графики зависимости x_D от t_D , на которых фигурируют линии постоянной насыщенности. На Рис.5-5 показан годограф для процесса вытеснения нефти водой, представленного на Рис.5-3(b) и 5-4. Кривые постоянной насыщенности представляют собой прямые линии с углом наклона, определяемым v_{S_1} из уравнения (5.2-9). Аналогичным образом импульсы представлены жирными прямыми с углом наклона, который дается уравнением (5.2-12). Область, имеющая изменяющуюся насыщенность, заштрихована. Области постоянной насыщенности примыкают к волнам и не имеют линий насыщенности. Годографы очень удобны, т.к. они конкретизируют как профили, так и динамику изменения.

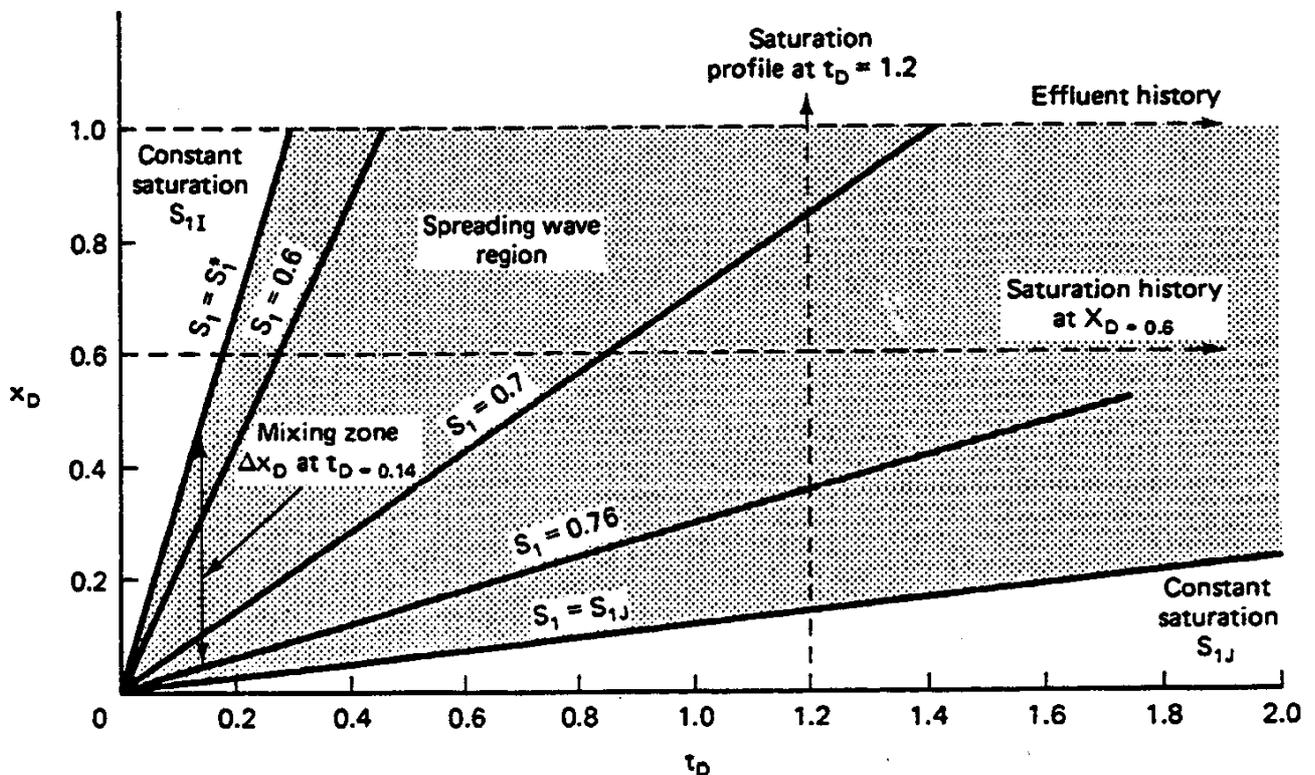


Рис.5-5 Годограф для процесса вытеснения, представленного на Рис.5-3(b) и 5-4

Из определения динамики изменения выходящего потока импульсная область вытеснения нефти водой прибывает в зону $x_D = 1$, когда

$$t_D^0 = \frac{S_1^* - S_{1I}}{f_1^* - f_{1I}} \quad (5.2-16a)$$

что следует из уравнений (5.2-12) и (5.2-13). *Время прорыва* t_D^0 - важное событие в процессе вытеснения; при значениях $t_D > t_D^0$ мы добываем какое-то количество закачиваемой воды. Очевидная неэффективность этого свидетельствует о том, что мы бы хотели, чтобы вытеснение осуществлялось таким образом, чтобы t_D^0 было как можно больше; т.е. мы бы хотели усилить то свойство вытеснения, которое генерирует импульс. При $t_D > t_D^0$ водонасыщенность на выходном конце неявно определяется как

$$f_1' \Big|_{x_D=1} = \frac{1}{t_D} \quad (5.2-16b)$$

из уравнения (5.2-10). В лабораторных заводнениях обычно измеряют $f_1|_{x_D=1}$, долю воды в выходящем потоке, а не насыщенность на выходном конце. Содержания воды и нефти ($1 - f_1|_{x_D=1}$) являются функциями только времени из уравнения (5.2-16b).

Средние насыщенности

При расчете коэффициента вытеснения у нас должен быть какой-то способ для расчета средних насыщенностей, т.к. из уравнения (5.1-2) они фигурируют в определении E_D . Эти средние значения даются методом интегрирования Уэлджа (Уэлдж, 1952). Рассмотрим профиль насыщенностей, приведенный на Рис.5-3(b) при постоянном значении t_D , и пусть x_{D1} будет любым безразмерным местоположением на или позади фронта импульса, $x_{D1} \leq v_{\Delta S_1} t_D$. Средняя водонасыщенность позади x_{D1} равна

$$\widehat{S}(t_D) = \frac{1}{x_{D1}} \cdot \int_0^{x_{D1}} S_1 dx_D \quad (5.2-17)$$

Уравнение (5.2-17) можно интегрировать по частям

$$\widehat{S}(t_D) = \frac{1}{x_{D1}} \cdot \left((x_D \cdot S_1) \Big|_0^{x_{D1}} - \int_{S_{1I}}^{S_{11}} x_D dS_1 \right) \quad (5.2-18)$$

где $S_{11} = S_1|_{x_{D1}}$. Т.к. x_{D1} является распространяющейся частью волны насыщения, подынтегральное выражение x_D может быть заменено уравнением (5.2-11)

$$\widehat{S}_1 = S_{11} - \frac{1}{x_{D1}} \cdot \int_{S_{1I}}^{S_{11}} t_D \cdot f_1' dS_1 \quad (5.2-19)$$

которое может быть легко проинтегрировано (вспомните, что t_D – это постоянная величина) до

$$\widehat{S}_1 = S_{11} - \frac{t_D}{x_{D1}} \cdot (f_{11} - f_{1I}) \quad (5.2-20)$$

Уравнение (5.2-20) определяет соотношение средней водонасыщенности позади x_{D1} с движением отдельных фаз в многофазовом потоке и насыщенностью в этой точке. В этой точке t_D может быть заменено уравнением (5.2-11), давая

$$\hat{S}_1 = S_{11} - \frac{(f_{11} - f_{1J})}{f'_{11}} \quad (5.2-21)$$

Уравнение (5.2-21) является конечным видом интегрирования Уэлджа.

Наиболее употребительной эта методика является при допущении, что $x_{D1} = 1$ после прорыва воды ($t_D \geq t_D^0$), в точке, в которой $\hat{S}_1 = \bar{S}_1$ и f_{11} становится обводненным. Таким образом, водонасыщенность на выходном конце можно рассчитать из уравнения (5.2-20) как

$$S_1|_{x_D=1} = \bar{S}_1 - t_D (f_{1J} - f_1|_{x_D=1}) \quad (5.2-22)$$

Если мы знаем содержание воды и среднюю водонасыщенность, определенные непосредственным измерением, одновременное применение уравнений (5.2-16) и (5.2-22) дает способ определения кривых движения отдельных фаз в многофазовом потоке ($f_1|_{x_D=1}$ в зависимости от $S_1|_{x_D=1}$ или f_{11} в зависимости от S_{11}) по экспериментальным данным.

Средняя водонасыщенность следует из уравнения (5.2-21) для \bar{S}_1 при заданной кривой $f_1 - S_1$. Это уравнение можно преобразовать, получая

$$f_1|_{x_D=1} - f_{1J} = f_1'|_{x_D=1} \cdot (S_1|_{x_D=1} - \bar{S}_1) \quad (5.2-23)$$

Таким образом, \bar{S}_1 при любом $t_D \geq t_D^0$ дается продолжением прямой, касательной к кривой движения отдельных фаз в многофазовом потоке при $(f_1, S_1)_{x_D=1}$, до пересечения с координатой y при $f_1 = f_{1J}$. Безразмерным временем, необходимым для того, чтобы довести эту точку до $x_D = 1$, является величина, обратная углу наклона этой линии, полученная из уравнения (5.2-16). На Рис.5-4 показан графический метод для этого. Из величины \bar{S}_1 , определенной таким образом, $\bar{S}_2 = 1 - \bar{S}_1$ может использоваться в определении (уравнение 5.1-2) для расчета E_D .

Вышеприведенное построение и уравнения (5.2-22) и (5.2-23) применяются только к безразмерному времени после прорыва. До прорыва средняя водонасыщенность составляет

$$\bar{S}_1 = S_{1I} + t_D \cdot (f_{1J} - f_{1I}), \quad t_D < t_D^0 \quad (5.2-24)$$

применив общий баланс по воде (уравнение 5.2-2) к этому частному случаю. Уравнения (5.2-22) и (5.2-24) идентичны за исключением величины, использовавшейся для содержания воды в выходящем потоке.

Теперь мы готовы продемонстрировать влияние отношения подвижностей M^0 , относительной проницаемости и $N_g^0 \sin \alpha$ в конечной точке на коэффициент вытеснения нефти. На Рис.5-6 схематично показывает влияние этих параметров на процессы вытеснения при $f_{1I} = 0$ и $f_{1J} = 1$. Рис.5-6 показывает, сверху донизу, графики зависимости E_D от t_D , профили водонасыщенности при различных t_D , и кривую движения отдельных фаз в многофазовом потоке, которые дают указанное поведение. Слева направо цифры показывают характер вытеснения нефти при убывающей M^0 , возрастающей $N_g^0 \sin \alpha$ и возрастающей гидрофильности путем смещения кривых относительной проницаемости. На Рис.5-6 представлены три из четырех типов волн – распространяющиеся, смешанные и заостряющиеся. Исходя непосредственно из Рис.5-6, можно сделать несколько важных выводов.

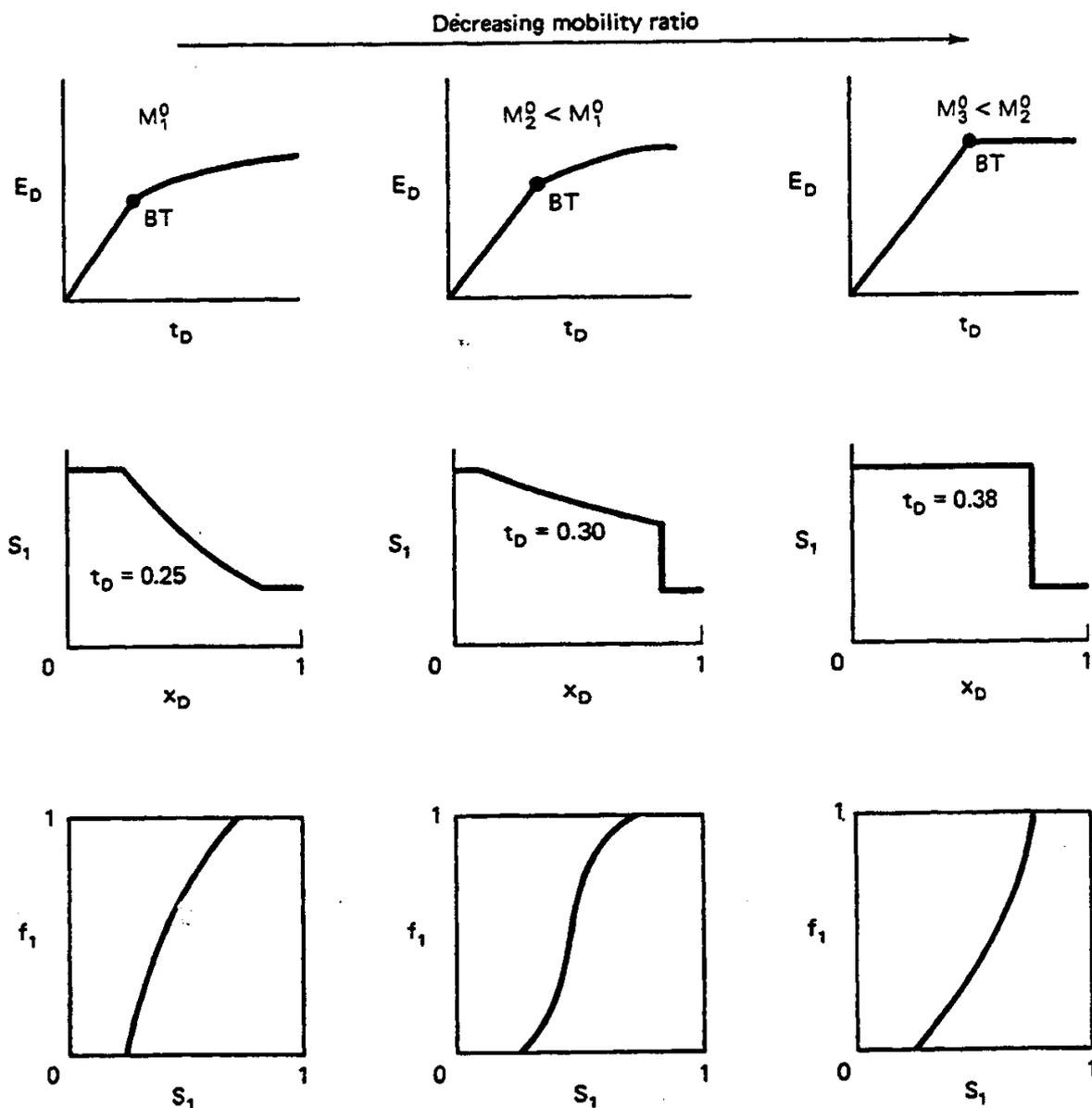


Рис.5-6 Схематическое изображение влияния соотношения подвижностей на коэффициент вытеснения

1. Любое изменение, которое увеличивает размер импульса волны водонасыщенности, увеличивает также E_D при любом заданном t_D . Эти изменения также задерживают прорыв воды и уменьшают время, в течение которого проницаемая среда одновременно выпускает две фазы.
2. Уменьшение M^0 , увеличение $N_g^0 \sin \alpha$, и усиление гидрофльности улучшают E_D . Из этих трех величин M^0 обычно является единственной величиной, на которую мы можем повлиять. В Главе 6 мы видим, что уменьшение соотношения подвижностей также повышает коэффициент вертикального и площадного охвата; следовательно, уменьшение соотношения подвижностей повышает нефтеотдачу, по крайней мере, тремя путями. В основе процессов повышения нефтеотдачи, полагающихся частично или полностью, на снижение соотношения подвижностей вытесняющей и вытесняемой жидкостей, лежит *концепция отношения подвижностей*. На Рис.5-6 показано, что когда волна водонасыщенности становится полным импульсом, от дальнейшего снижения M^0 пользы для E_D не будет.

И, наконец, нет единственного значения M^0 , при котором волна меняется от распространяющейся до заостряющейся, т.к. на вытеснение влияет также форма кривых относительной проницаемости.

3. Какой бы низкой ни была величина M^0 , конечный коэффициент вытеснения

$$E_D^\infty = \frac{(S_{2I} - S_{2r})}{S_{2I}}$$

ограничен наличием остаточной нефтенасыщенности. Методы повышения нефтеотдачи, за счет которых предполагается добыть остаточную нефть, должны основываться на чем-то другом, нежели концепция отношения подвижностей, например, на вытеснении смешивающимися агентами (см. Раздел 5-5 и Главу 7) или снижении межфазного натяжения на границе раздела воды и нефти (см. Главу 9).

Помимо M^0 , общеупотребительными являются, по крайней мере, два других отношения подвижностей. Среднее отношение подвижностей \bar{M} , определяемое как

$$\bar{M} = \frac{(\lambda_{r1} + \lambda_{r2})_{S_1=\bar{S}_1}}{(\lambda_{r1} + \lambda_{r2})_{S_1=S_{1I}}} \quad (5.2-25a)$$

является отношением общей относительной подвижности при средней водонасыщенности позади импульсного фронта к той же величине, определенной при начальной водонасыщенности. \bar{M} обычно используется для корреляции кривых площадного коэффициента охвата (см. Главу 6). Отношение подвижностей на фронте импульса M_{sh} равно

$$M_{sh} = \frac{(\lambda_{r1} + \lambda_{r2})_{S_1=S_1^*}}{(\lambda_{r1} + \lambda_{r2})_{S_1=S_{1I}}} \quad (5.2-25b)$$

M_{sh} является величиной, которая регулирует образование языков обводнения в результате разности вязкостей. В процессах вытеснения, напоминающих вытеснение поршнем, все три размера одинаковы.

Наиболее общим определением соотношения подвижностей фактически является соотношение перепадов давления впереди позади фронта вытеснения. Вышеприведенные определения, в зависимости от характера фронта вытеснения, следуют из этого для случая несжимаемого потока (пространственно независимая скорость потока). Для сжимаемых потоков или потоков конденсирующих жидкостей больше подходит общее определение (см. Главу 11 и Пример 5J).

5-3 Рассеяние в процессах несмешивающегося вытеснения

В этом разделе мы рассмотрим два общих эффекта рассеяния в одномерных потоках: капиллярное давление и сжимаемость жидкости. Оба явления являются диссипативными; они являются причиной того, что зоны смешивания растут быстрее или иначе, чем в потоке, в котором рассеяние отсутствует. Оба явления, кроме того, вызывают дополнительные эффекты.

Капиллярное давление

Мы не даем решения в аналитическом виде для уравнения сохранения воды. Но мы можем качественно проиллюстрировать влияние капиллярного давления на вытеснение нефти водой и можем привести, используя аргументы масштабирования, количественные ориентиры, когда это может быть важным.

Для несжимаемых жидкостей и при капиллярном давлении P_c материальный баланс по воде (уравнение 5.2-1) все еще применяется, но движение водной фазы (уравнение 5.2-2) становится равным (см. Пример 5F):

$$f_1(S_1) = \frac{\lambda_{r1}}{\lambda_{r1} + \lambda_{r2}} \cdot \left(1 - \frac{k \cdot \lambda_{r2} \Delta \rho \cdot g \cdot \sin \alpha}{u} \right) + \frac{k \cdot \lambda_{r1} \cdot (\partial P_c / \partial x)}{(1 + \lambda_{r1} / \lambda_{r2}) \cdot u} \quad (5.3-1)$$

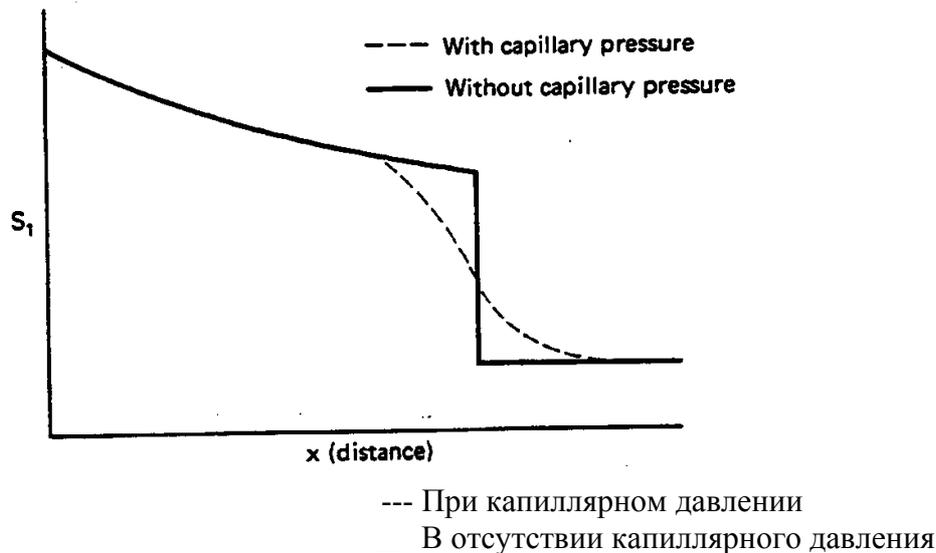
Первый член в правой части уравнения (5.3-1) является просто движением водной фазы в отсутствии капиллярного давления (уравнение 5.2-2); поэтому многие выводы о вытеснениях при $P_c = 0$, хотя и несколько видоизмененные, распространяются на вытеснения, происходящие при наличии капиллярного давления. Второй член в правой части уравнения (5.3-1) представляет собой вклад P_c в движение водной фазы в многофазовом потоке. Включение члена, представляющего капиллярное давление, является причиной изменения характера уравнения (5.2-1) с гиперболического на параболический – общий результат рассеивающих действий из-за пространственной производной P_c .

Капиллярное давление в уравнении (5.3-1) представляет собой разность давлений в двух непрерывных фазах – нефтяной и водной (см. Раздел 3-2). Производное $\partial P_c / \partial x = (dP_c / dS_1) \cdot (\partial S_1 / \partial x)$ имеет положительный знак при вытеснениях как в гидрофобной, так и в гидрофильной среде, т.к. $\partial P_c / \partial S_1$ – отрицательная величина в обоих случаях (см. Рис.3-5) и $\partial S_1 / \partial x$ также отрицательная величина. Следовательно, при заводнениях капиллярное давление усиливает движение водной фазы при заданной водонасыщенности. Это усиление имеет особенно большое значение в областях с большими градиентами насыщенности, т.е. вокруг фронтов импульсов, прогнозируемых теорией Баклея-Леверетта. При вытеснении воды нефтью P_c обуславливает меньшее движение водной фазы, т.к. $\partial S_1 / \partial x > 0$.

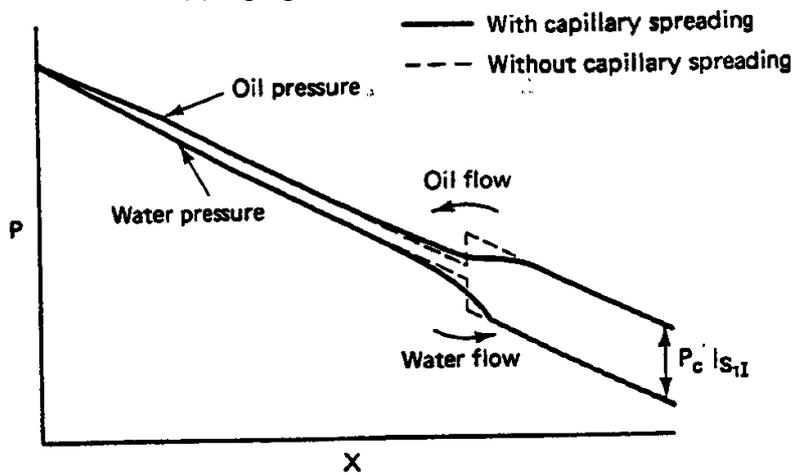
Влияние P_c на одномерное вытеснение заключается в распространении волны водонасыщенности, особенно вокруг импульсов; Рис.5-7, на котором показано как это происходит, представляет собой смоделированный профиль водонасыщенности и давления для процесса одномерного заводнения в гидрофильной среде. На Рис.5-7(a) показаны профили водонасыщенности в присутствии и отсутствии капиллярного давления; Рис.5-7(b) показывает соответствующие профили давления. Данные обоих рисунков получены при одном и том же значении t_D . Фазовые давления, представленные на Рис. 5-7(b) пунктирной линией, это давления, которые имели бы место, если бы импульс остался в профиле водонасыщенности. Конечно, изображение импульсных волн при $P_c \neq 0$ некорректно, но такое изображение показывает движущую силу при капиллярном смешивании.

Впереди фронта (вниз по потоку) разница между давлениями нефтяной и водной фаз постоянна и равна капиллярному давлению при S_{1f} . На фронте фазовые давления быстро меняются. Но позади фронта (вверх по потоку) разница между давлениями нефтяной и водной фаз уменьшается до величины, отмечаемой при $S_1 = S_{1f}$. Сравните эти комментарии к Рис.5-7(a) и 3-5. Теперь в импульсе имеется градиент локального давления, который заставляет нефть течь вверх (противоточное впитывание), а воду течь вниз быстрее, чем под влиянием только капиллярных сил. Образующееся в результате локальное смешивание обуславливает рассеяние импульса (Рис.5-7а) и исчезновение резкого изменения давления. Позади фронта, в распространяющейся части волны водонасыщенности влияние капиллярного давления невелико.

Капиллярное давление будет небольшим, если длина системы L большая.



(a) Профили водонасыщенности



(b) Профили давления водной и нефтяной фаз

Рис.5-7 Профили насыщенности и давления при продольном капиллярном впитывании (Йокояма, 1981)

Рассмотрим безразмерное уравнение сохранения воды с подставленным уравнением (5.3-1) и $\alpha = 0$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_D} \left(\frac{k \cdot \lambda_{r1}}{u \cdot L \cdot \left(1 + \frac{\lambda_{r1}}{\lambda_{r2}} \right)} \frac{\partial P_c}{\partial x_D} \right) = 0 \quad (5.3-2)$$

Последний член в левой части этого уравнения является нелинейным в отношении S_1 и поэтому трудноопределимым. Используя выражение Леверетта для функции j (уравнение 3.2-2), мы можем записать уравнение (5.3-2) как

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_D} + \frac{\partial}{\partial x_D} \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}}} \right) + \frac{1}{N_{RL}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_D} \left(g(S_1) \frac{\partial S_1}{\partial x_D} \right) = 0 \quad (5.3-3)$$

где g – это положительная безразмерная функция водонасыщенности

$$g(S_1) = - \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_{r1}}{\lambda_{r2}}} \right) \cdot \left(\frac{S_1 - S_{1r}}{1 - S_{2r} - S_{1r}} \right)^{n_1} \frac{dj}{dS_1} \quad (5.3-4)$$

а N_{RL} – число Рапопорта и Лиаса – безразмерная константа, впервые примененная этими авторами (1953) для обозначения случаев, когда действие капиллярного давления становится важным.

$$N_{RL} = \left(\frac{\phi}{k} \right)^{1/2} \cdot \frac{\mu_1 \cdot u \cdot L}{k_{r1}^0 \cdot \phi \cdot \sigma_{12} \cdot \cos \theta} \quad (5.3-5)$$

Рис.5-8 представляет собой график зависимости нефтеотдачи в момент прорыва от $\mu_1 \nu L$ (вспомните $\nu = u / \phi$), построенный на основании экспериментальной работы Рапопорта и Лиаса. Т.к. в их ядрах $S_{1f} = 0$, вертикальная ось на Рис.5-8 представляет собой коэффициент вытеснения в момент прорыва, E_D^0 . По мере увеличения $\mu_1 \nu L$, E_D^0 возрастает до максимального значения, равного 0.58. При больших значениях $\mu_1 \nu L$ E_D^0 является постоянной величиной, прогнозируемой теорией Баклея – Леверетта.

Рапопорт и Лиас не строили графика зависимости своих результатов от более общего N_{RL} ; однако, используя заданное значение $k = 0.439 \text{ мкм}^2$ и $\phi = 0.24$, и принимая $k_{r1}^0 \sigma_{12} \cos \theta = 1 \text{ мН/м}$ (что является типичным для гидрофильной среды), P_c не повлияет на одномерное вытеснение нефти водой, если N_{RL} примерно больше 3.

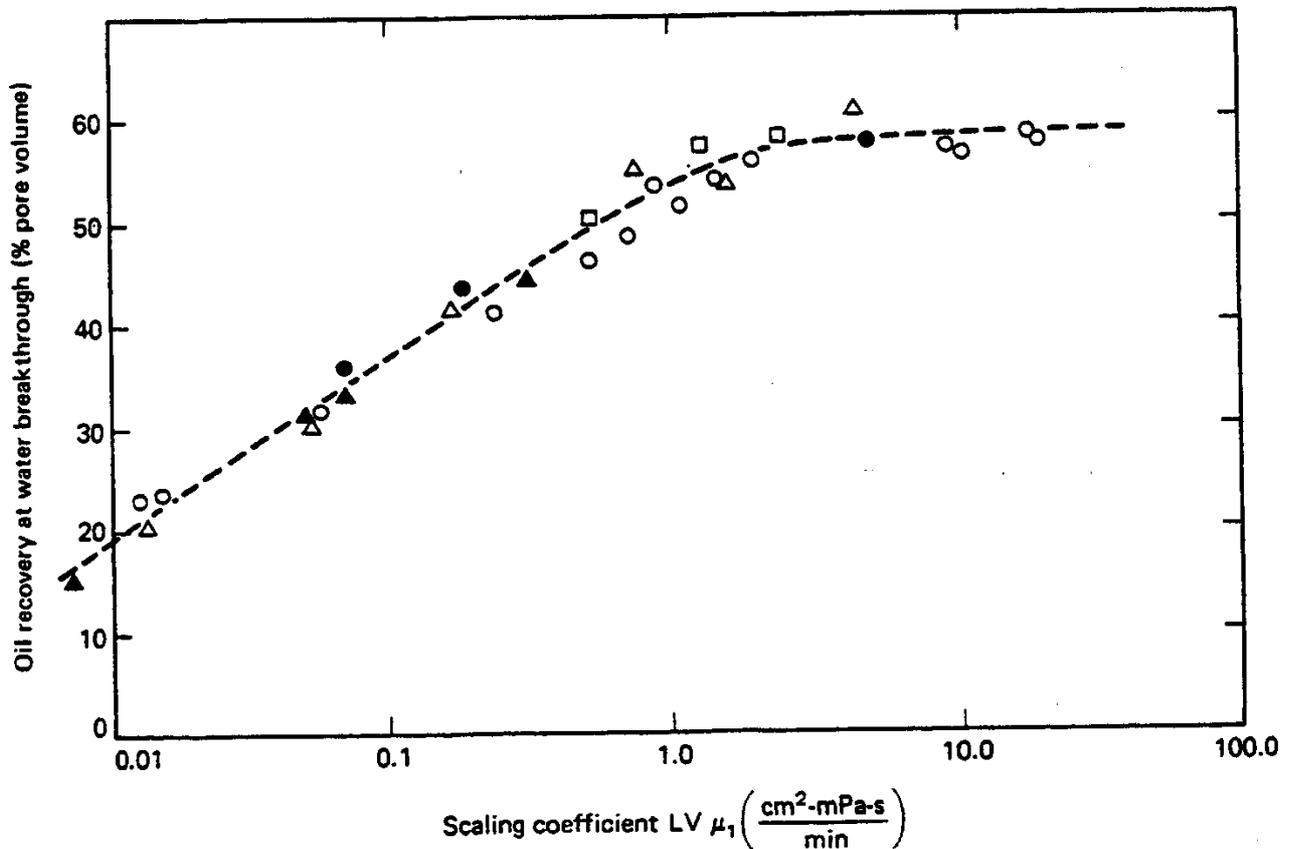


Рис.5-8 Взаимосвязь нефтеотдачи в момент прорыва и масштабного коэффициента в сухих пленочных alumdum ядрах, не содержащих погребенной воды. Разные обозначения изображают меняющуюся длину ядер и вязкость нефти. (Рапопорт и Лиаз, 1953)

Из-за длины, появившейся в числителе уравнения (5.3-5), P_c будет влиять на фронт вытеснения в гораздо в большей степени в лабораторных заводнениях, чем в промышленных вытеснениях вследствие большого несоответствия L .

Конечно, в микроскопическом масштабе капиллярные силы имеют большое значение при определении уловленной или остаточной нефти как в лабораторных, так и в промышленных вытеснениях. В Разделе 3-3 мы видели, что величина S_{2r} зависела от локального соотношения вязкостных и капиллярных сил - капиллярного числа N_{vc} . Общий вид капиллярного числа $N_{vc} = \nu\mu_1 / k_{r1}^0 \sigma_{12} \cos \theta$ введен в определение N_{RL}

$$N_{RL} = \left(\frac{\phi}{k} \right)^{1/2} \cdot L \cdot N_{vc} \quad (5.3-6)$$

Коэффициент $L(\phi/k)^{1/2}$ является мерой соотношения макроскопического размера проницаемой среды и характеристического размера породы. Следовательно, N_{vc} и N_{RL} выражают одно и то же физическое понятие – соотношение вязкостных и капиллярных сил – но в разных масштабах.

Вспомните, что если N_{vc} меньше, чем примерно 10^{-5} , то остаточные фазовые насыщенности приблизительно постоянны. Для хорошо отсортированной среды мы можем, в таком случае, наложить ограничения на N_{RL} так, что капиллярные силы в любом масштабе не будут влиять на вытеснение

$$3 < N_{RL} < 10^{-5} \cdot L \cdot \left(\frac{\phi}{k} \right)^{1/2} \quad (5.3-7)$$

При большом L это чрезвычайно широкий диапазон и этим объясняется полное отбрасывание всех капиллярных сил в расчетах одномерных вытеснений. В лабораторном масштабе может оказаться невозможным удовлетворить оба требования.

N_{RL} может быть выражено более прямым способом. Из уравнения (5.3-5) мы можем заменить закон Дарси для воды, определенный как $S_1 = 1 - S_{2r}$ на $v = u/\phi$, получив:

$$N'_{RL} = \left(\frac{k}{\phi} \right)^{1/2} \cdot \frac{\Delta P_1}{\sigma_{12} \cdot \cos \theta} \quad (5.3-8)$$

где ΔP_1 – это перепад давления в проницаемой среде, замеренный через водную фазу. Члены, содержащие проницаемость и межфазное натяжение, можно выразить в виде функции j Леверетта, чтобы получить еще одно приближение для N_{RL}

$$N''_{RL} = \frac{\Delta P_1}{\Delta P_c} \quad (5.3-9)$$

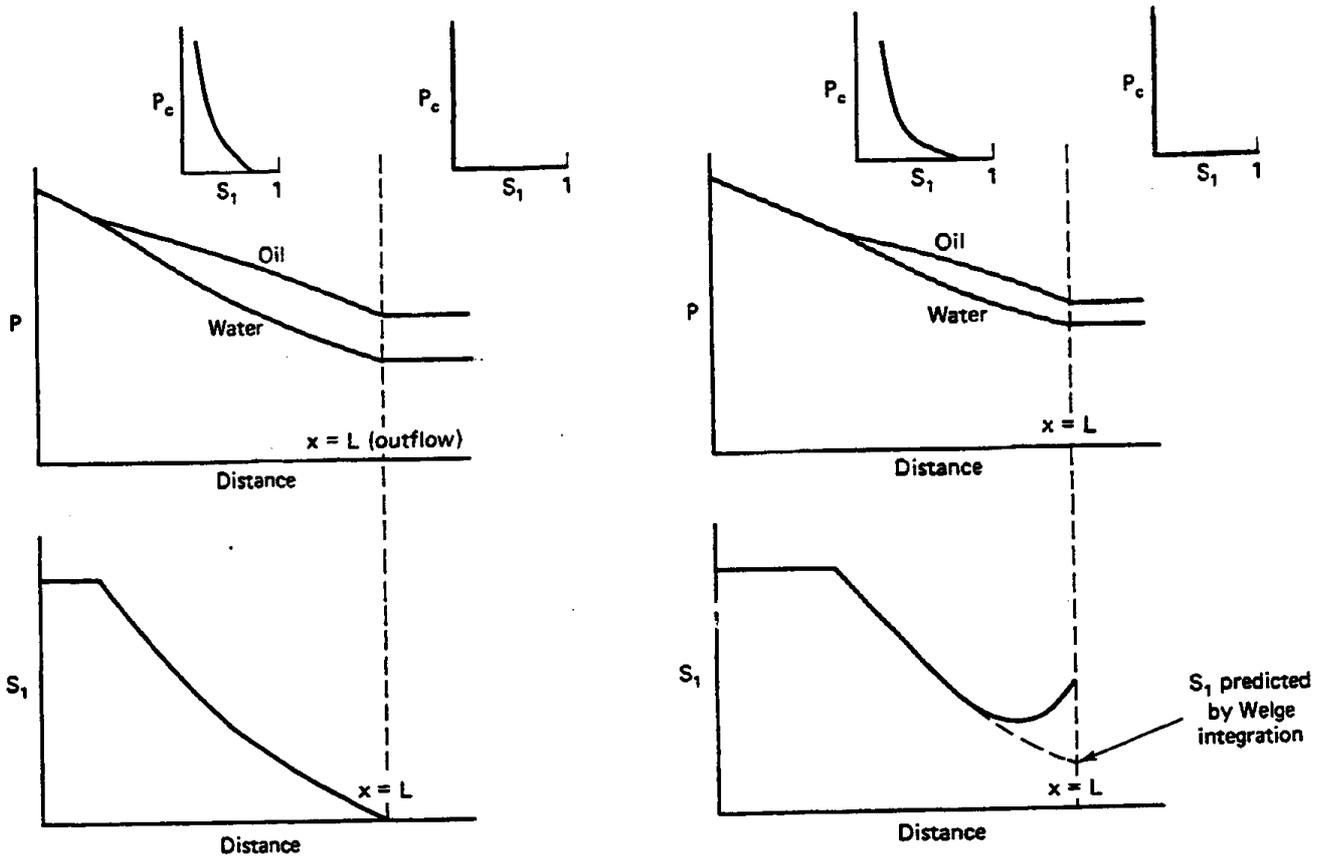
где ΔP_c – изменение капиллярного давления между состояниями начальной и конечной водонасыщенности. Уравнение (5.3-9) является непосредственным сравнением перепада вязкостного и капиллярного давления, и является наименее точным, но самым прямым из всех методов измерений.

При небольшом N_{RL} капиллярное давление вызовет распространение импульсных волн. Хотя существует параллель между дисперсией в смешивающихся вытеснениях (см. Раздел 5-5) и эффектами P_c в несмешивающихся вытеснениях, аналогия не распространяется на рост зоны смешивания. В Разделе 5-5 мы показываем, что зоны дисперсионного смешивания растут пропорционально квадратному корню времени. Капиллярное давление обычно заставляет зоны смешивания расти экспоненциально до некоторого асимптотического предела, после которого изменение происходит без дальнейшего роста. Как это происходит можно объяснить с качественной точки зрения, рассмотрев волну водонасыщенности, которая представляет собой импульс по всему диапазону возможных насыщенныхностей, как в правой колонке на Рис.5-6, где мы не учитывали эффекты P_c . Как мы видели, эффекты P_c вызывают распространение такой волны, но все еще существует сильная тенденция волны заостряться из-за выпуклой направленной вверх формы кривой движения отдельных фаз в многофазовом потоке. Эти два эффекта стремятся уравновесить друг друга, заставляя волну стремиться к асимптотическому пределу. Существование такого предела далее ограничивает значение капиллярного давления как смешивающего механизма в одном измерении. Асимптотические или «стабильные» зоны смешивания отмечались в одномерных лабораторных заводнениях несколькими авторами (Бэйл и Марсден, 1957).

Никакое обсуждение механизмов влияния капиллярного давления на одномерное вытеснение не будет полным без упоминания капиллярного концевой эффект. Этот эффект имеет место, когда происходит нарушение непрерывности кривой капиллярного давления, как например, когда одномерная проницаемая среда состоит из двух последовательно расположенных однородных сред разной проницаемости. Но чаще всего это происходит в конце лабораторного керна, когда текущие фазы переходят из проницаемой в непроницаемую область. Характер насыщенности в плоскости нарушения непрерывности значительно отличается от характера, прогнозируемого теорией Баклея – Леверетта.

Рассмотрим профили водонасыщенности и давления в процессе заводнения гидрофильной среды, представленные на Рис.5-9. Капиллярные силы таковы, что их нельзя не учитывать. На Рис.5-9(a) показан момент, когда вода подходит к выходному концу ($x = L$), а на Рис.5-9(b) – некоторое время спустя. На правой стороне выходного конца проницаемая среда отсутствует. Эта область характеризуется кривой нулевого капиллярного давления везде, за исключением $S_1 = 0$, где существуют все значения капиллярного давления. Давления нефтяной и водной фаз должны быть непрерывными при $x = L$; поэтому водонасыщенность при $x > L$ должна равняться нулю, т.к. существует ненулевая разность давления фаз. Это, в свою очередь, подразумевает, что вода не может течь через выходной конец среды до тех пор, пока капиллярное давление как раз внутри системы не исчезнет. При отсутствии добычи при $x = L$, но при непрерывном перемещении воды к выходному концу, водонасыщенность должна нарастать при $x = L$ до тех пор, пока $P_c = 0$ ($S_1 = 1 - S_{2r}$) в этой плоскости. Следовательно концевой капиллярный эффект является причиной задержки водопритока и расхождения данных водонасыщенности при $x = L$ по сравнению с водонасыщенностью, прогнозируемой теорией Баклея – Леверетта (Рис.5-9b).

Эта задержка может быть причиной значительной ошибки при использовании метода интегрирования Уэлджа (уравнение 5.2-22). Капиллярный концевой эффект был отмечен Кайтом и Рапопортом (1958) в экспериментальной работе, и Дугласом и др. (1958) – при моделировании. На Рис.5-10 представлены данные, показывающие капиллярный концевой эффект.



(a) В момент подхода воды при $x = L$

(b) После подхода воды при $x = L$

Рис.5-9 Схематическое изображение капиллярного концевой эффекта

Чтобы исключить капиллярный концевой эффект, лабораторные заводнения проводились при больших скоростях и большой длине керна (и то, и другое увеличивает N_{RL}), или размещая второй проницаемый материал на выходном конце, что обеспечивало хороший капиллярный контакт.

Сжимаемость жидкости

Вторым рассеивающим эффектом является сжимаемость жидкости. На Рис.5-11 показаны профили водонасыщенности для двух заводнений с применением сжимаемой нефти и несжимаемой воды (Рис.5-11a), и сжимаемой воды и несжимаемой нефти (Рис.5-11b). Для сравнения приведен случай полностью несжимаемой жидкости, выведенный Баклеем – Левереттом. Эти результаты были получены компьютерным моделированием процессов вытеснения, проводившихся при постоянной скорости закачки воды (Рис.5-11a) и постоянном темпе добычи нефти (Рис.5-11b). Мы представляем результаты в виде произведения сжимаемости и общего перепада давления ΔP (без учета капиллярных сил), т.к. эта величина определяет пригодность допущения небольшой сжимаемости жидкости при анализе испытания скважин. При произведении $c_j \Delta P$ равном 0.01 или меньше, эффект сжимаемости жидкости ничтожно мал; размывание фронтов импульсов при $c_j \Delta P = 1.25 \times 10^{-3}$ происходит из-за числового разброса, который представляет собой искусственное рассеивающее действие.

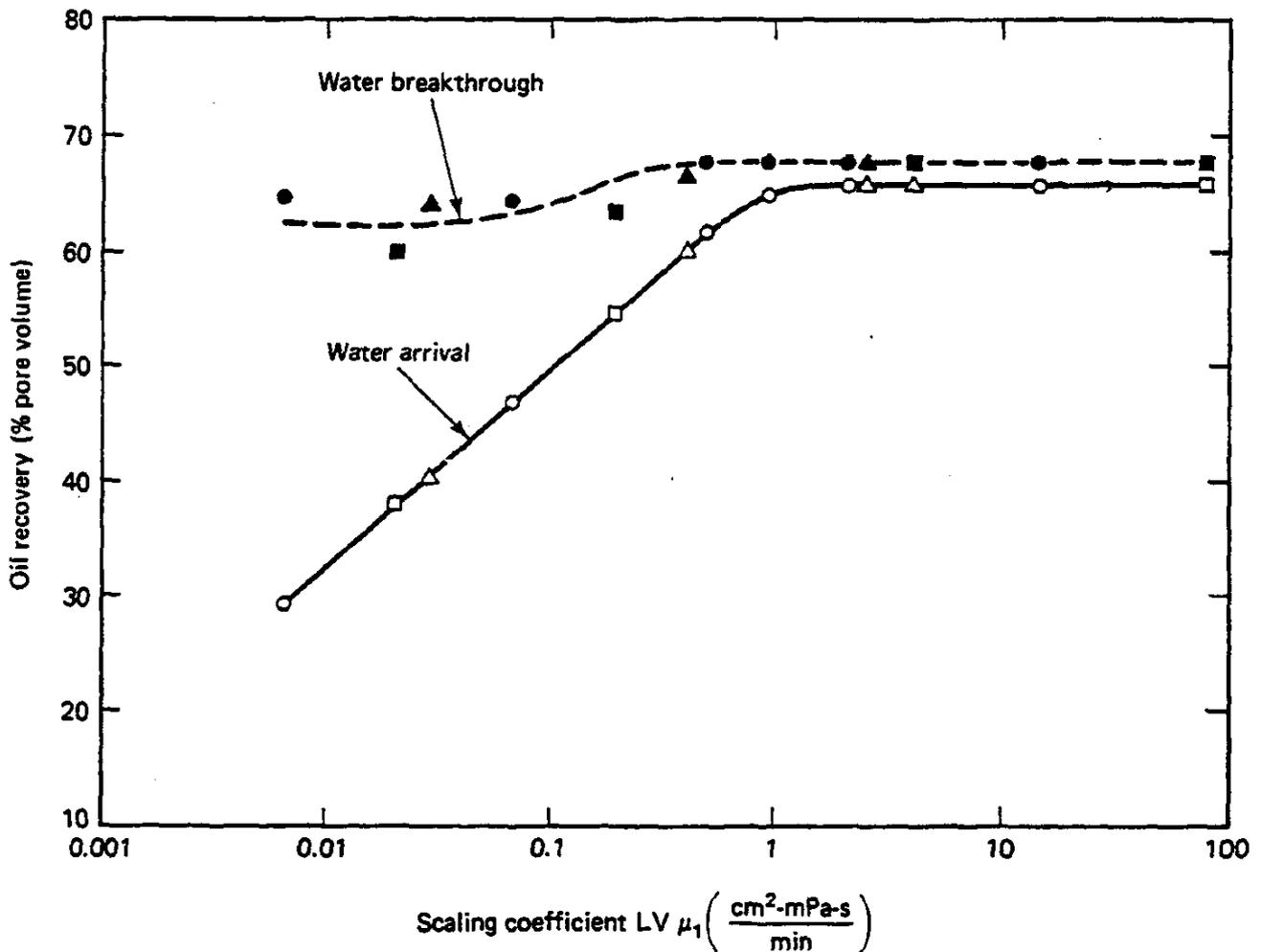
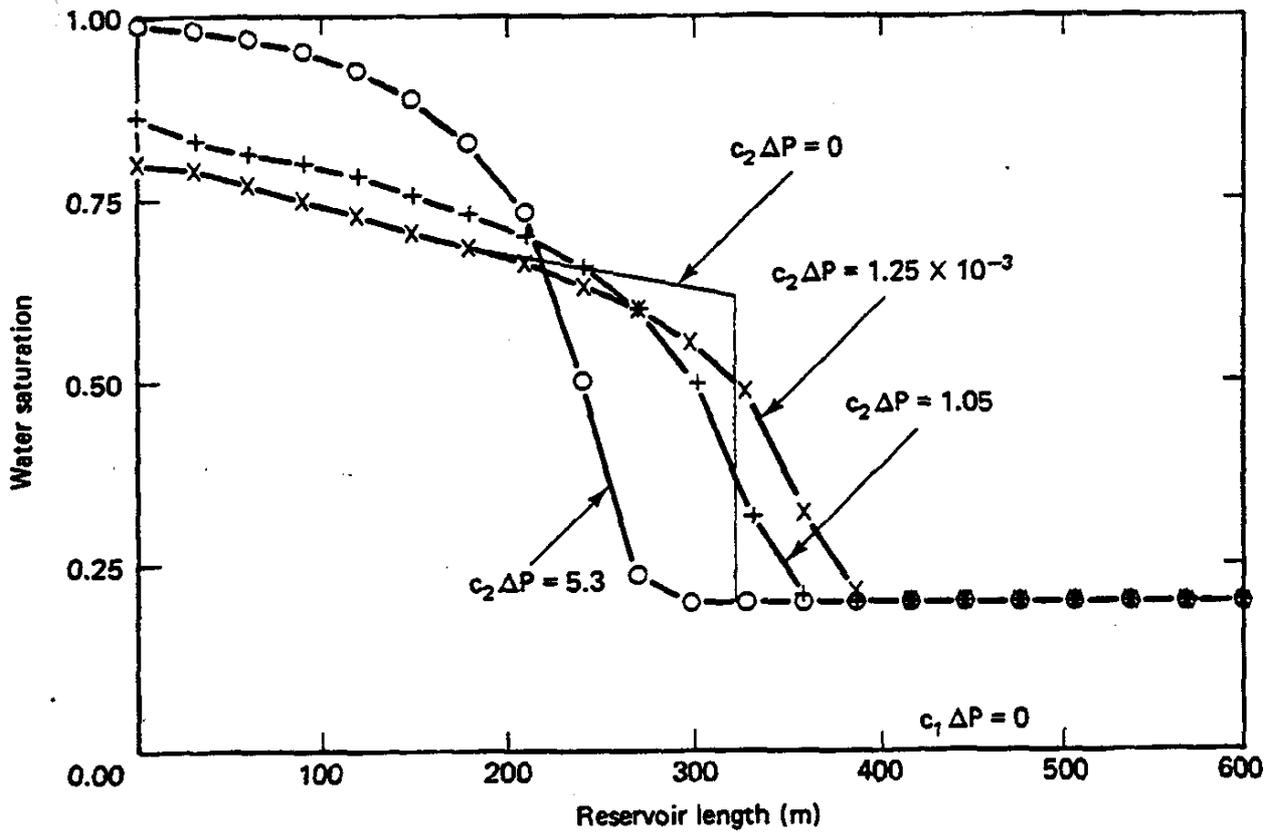


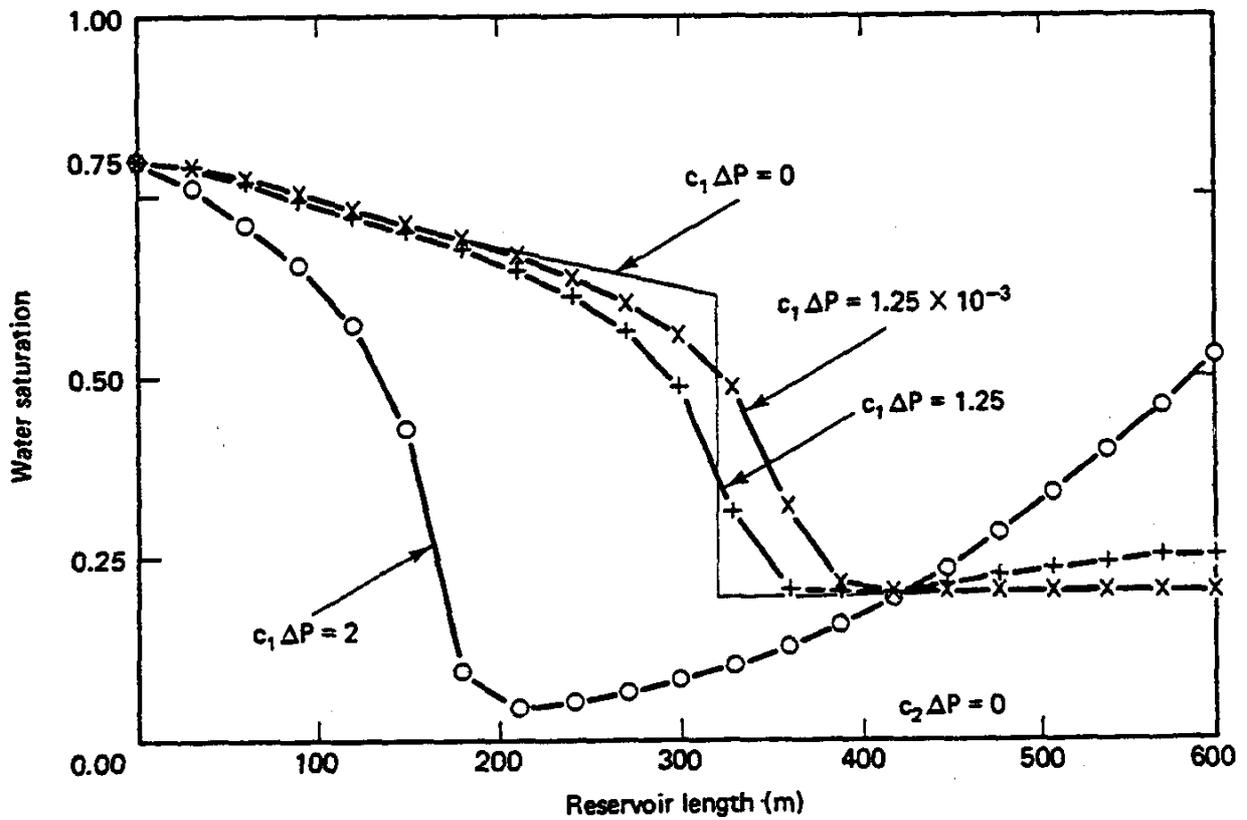
Рис.5-10 Корреляция данных заводнения, полученных на гидрофильных ?alumduum кернях (Кайт и Рапопорт, 1958)

Произведения $c_j \Delta P$, представленные на Рис.5-11, конечно же нереально высоки; мы выбрали эти значения только для того, чтобы подчеркнуть эффект сжимаемости.

Действие сжимаемости как нефти, так и воды, заключается в распространении импульсного фронта Баклея – Леверетта, в добавление к распространению, обусловленному числовым разбросом, но это действие не становится резко выраженным до тех пор, пока $c_j \Delta P$ не равно 1 или больше. Однако мы хотели бы рассмотреть вытеснения, в которых обе жидкости были бы сжимаемыми, чтобы получить представление о комбинированном рассеивающем эффекте с большей степенью распространения. На Рис.5-11(a) водонасыщенность на входном конце превышает $1 - S_{2r}$. При более высоком давлении происходит сжатие нефти до величины ниже величины остаточной насыщенности. Аналогичным образом на Рис.5-11(b) водонасыщенность на выходном конце превышает S_{1r} , т.к. при пониженном давлении вода будет расширяться. Эти эффекты характерны для конкретных условий, в которых проводились опыты. Если бы мы поддерживали давление добычи постоянным и не давали бы фазовым насыщенностям уменьшаться ниже их соответствующих остаточных величин, ни один из эффектов не имел бы места. Все же, из Рис.5-11 мы видим, что эффект сжимаемости в качественном отношении аналогичен эффекту капиллярного давления; распространение импульсных фронтов происходит, но с меньшим влиянием на «хвост» насыщенности.



(a) Сжимаемая нефть, несжимаемая вода



(b) Сжимаемая вода, несжимаемая нефть

Рис.5-11 Профили водонасыщенности в процессах вытеснения нефти водой при $t = 200$ суток (Самизо, 1982)

5-4 Идеальные смешивающиеся вытеснения

Два компонента являются взаимно смешивающимися, если они смешиваются во всех пропорциях без образования границы раздела между ними. Это определение облекается в уравнения движения потока тем, что допускается, чтобы фаза состояла из нескольких взаимно смешивающихся компонентов.

В этом разделе мы рассмотрим изотермические смешивающиеся вытеснения, используя теорию движения отдельных фаз в многофазовом потоке при наличии одной или нескольких фаз. Мы рассмотрим идеальные смешивающиеся вытеснения при участии компонентов, которые не меняют свойства фаз, образуемых ими (более сложные вытеснения см. в Главе 7).

Скорости концентрирования

Многие концепции в Разделе 5-2 легко обобщаются до смешивающихся вытеснений. Мы записываем одномерное уравнение сохранения для компонентов $i = 1, \dots, N_c$ как:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^{N_p} S_j \cdot C_{ij} + \left(\frac{1-\phi}{\phi} \right) \cdot C_{is} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^{N_p} f_j \cdot C_{ij} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (5.4-1)$$

Уравнение (5.4-1) – это частный случай уравнения (2.4-10) с неучтенной дисперсией. f_j – это движение фазы j , определяемое уравнением (2.4-2) с неучтенным капиллярным давлением, а C_{ij} и C_{is} фазовые концентрации компонента i в фазе j и на твердой фазе, соответственно. Конечно, допущения, связанные с уравнением (2.4-10) – постоянная пористость, несжимаемые жидкости и идеальное смешивание – также применяются. В безразмерной форме уравнение (5.4-1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t_D} (C_i + C'_{is}) + \frac{\partial F_i}{\partial x_D} = 0, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (5.4-2)$$

где

C_i = суммарная фазовая концентрация компонентов i в жидкости

$$= \sum_{j=1}^{N_p} S_j C_{ij} \quad (5.4-3a)$$

C'_{is} = концентрация компонента i на твердой фазе на основе порового объема

$$= C_{is} \left(\frac{1-\phi}{\phi} \right) \quad (5.4-3b)$$

F_i = суммарный поток компонентов i

$$= \sum_{j=1}^{N_p} f_j C_{ij} \quad (5.4-3c)$$

Преобразование, выполняемое уравнением (5.4-3b), заменяет концентрацию твердой фазы, определяемую на основе объема твердой фазы (C_{is} – количество компонента i на твердой фазе / объеме твердой фазы), на концентрацию, определяемую на основе порового объема (C'_{is} -

количество i на твердой фазе / поровом объеме). Таким образом, C_i и C'_{is} непосредственно сопоставимы, и могут вместе использоваться в последующей работе, не прибегая к манипулированию единицами измерения. Определение суммарного потока взято из Хирасаки (1981) и Гелфферрик (1981).

В принципе, потоки F_i являются функциями C_i при $i = 1, \dots, N_C$, и мы можем перенести многие определения, особенно определения скорости насыщения, непосредственно из Раздела 5-2. Однако на практике зависимости $F_i = F_i(C_1, C_2, \dots, C_{N_C})$ чрезвычайно запутаны. Подробнее мы рассмотрим это позже, но здесь мы можем привести краткое изложение этой зависимости.

При известном значении C_i , C_{ij} и C_j можно рассчитать из зависимостей фазовых равновесий. Точный характер «мгновенного» расчета зависит от характера фазового поведения (см. Раздел 4-4 и Главы 7 и 9). При известных значениях S_j и C_{ij} фазовые относительные проницаемости $k_{rj} = k_{rj}(S_j, C_{ij})$ и вязкости $\mu_j = \mu_j(C_{ij})$ могут быть рассчитаны из нефтефизических зависимостей (см. Раздел 3-3). Из этих зависимостей следуют относительные подвижности $\lambda_{rj} = k_{rj}/\mu$, которые ведут непосредственно к f_j из уравнения (2.4-2). Если требуются также плотности фаз, (например, если проницаемая среда не горизонтальная), они следуют из $\rho_j = \rho_j(C_{ij})$ (уравнение 2.2-12). При известных значениях f_j и C_{ij} , F_i следует из уравнения (5.4-3с). Если необходимо, $C'_{is} = C'_{is}(C_{ij})$ можно также рассчитать из изотермы адсорбции (см. Главы 8 и 9).

Несмотря на эту сложность, мы можем записать уравнение (5.4-2) как:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial C'_{is}}{\partial C_i}\right)_{x_D}\right) \frac{\partial C_i}{\partial t_D} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial C_i}\right)_{t_D} \frac{\partial C_i}{\partial x_D} = 0, \quad i = 1, \dots, N_C \quad (5.4-4)$$

Частные производные $(\partial C'_{is} / \partial C_i)_{x_D}$ и $(\partial F_i / \partial C_i)_{t_D}$ в уравнении (5.4-4) следуют из цепного правила. Эти производные не то же самое, что $(\partial C'_{is} / \partial C_j)_{C_{m \neq j}}$, в определении полного дифференциала. Последние производные могут рассчитываться непосредственно из $C'_{is} = C'_{is}(C_{ij})$ и $F_i = F_i(C_i)$, тогда как первые производные требуют знаний $C_i = C_i(x_D, t_D)$, являющихся решениями. Поэтому уравнение (5.4-4) мало используется, за исключением случаев определения удельной скорости концентрирования v_{C_i}

$$v_{C_i} = \frac{(\partial F_i / \partial C_i)_{t_D}}{1 + (\partial C'_{is} / \partial C_i)_{x_D}}, \quad i = 1, \dots, N_C \quad (5.4-5a)$$

по аналогии с уравнением (5.2-10). Определение удельной скорости импульса $v_{\Delta C_i}$ следующее:

$$v_{\Delta C_i} = \frac{(\Delta F_i / \Delta C_i)}{1 + (\Delta C'_{is} / \Delta C_i)} \quad (5.4-5b)$$

Без дополнительных ограничивающих условий эти определения (уравнения 5.4-5a и 5.4-5b) не дают никакой новой информации. Но для случая нефть – вода, рассматриваемого в Разделе 5-2, они сводятся к $C_i = S_i$, $F_i = f_1$ и $C'_{is} = 0$, давая:

$$v_{C_i} = v_{S_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial S_1}\right)_{t_D} = \frac{\partial f_1}{\partial S_1} = f'_1(S_1) \quad (5.4-6)$$

Последнее равенство возможно, потому что f_1 является функцией только S_1 ; следовательно $f'_1 = (\partial f_1 / \partial S_1)_{t_D} = (\partial f_1 / \partial S_1)_{x_D}$. Несомненно, для более сложных случаев это

упрощение невозможно; и все же многие представляющие интерес вытеснения могут быть решены с помощью теории когерентной или простой волны, которую мы рассматриваем в Разделе 5-5. Теперь мы рассмотрим другие особо простые частные случаи смешивающихся вытеснений.

Трассеры в двухфазном потоке

Самый простой случай, который мы рассматриваем – это смешивающееся вытеснение в однофазном потоке компонента 2 компонентом 1. Для этого случая f_j и S_j равны нулю при всех значениях j , исключая 1. При этом конкретном значении j f_j и S_j равны единице. Если компонент 1 не адсорбируется, скорость концентрирования становится равной

$$v_{C_1} = 1 \quad (5.4-7)$$

что следует либо из уравнения (5.4-5a), либо из уравнения (5.4-5b). Этот на вид тривиальный результат имеет два важных последствия.

1. Пространственная скорость компонента 1 равна скорости основной массы жидкости, означая, что безразмерное время прорыва t_D^0 для компонента 1 также равно единице. Из уравнения (5.2-7) мы можем определить поровый объем среды, зная суммарное количество закачанной жидкости в момент прорыва (см. Пример 5К). Компоненты, которые перемещаются со скоростью основной массы жидкости, по этой причине являются «консервативными» трассерами.
2. Удельная скорость концентрирования не зависит от C_1 , означая, что волны, обусловленные консервативными трассерами, не имеют значения, что как правило справедливо для идеальных смешивающихся вытеснений.

Большинство вытеснений в процессе повышения нефтеотдачи являются только частично смешивающимися. Чтобы проиллюстрировать частично смешивающееся вытеснение, рассмотрим вытеснение водонефтяной смеси при водонасыщенности S_{1l} другой смесью при движении водной фазы $f_{1,j} = f_1(S_{1,j})$. Нам бы хотелось различать начальную и закачанную нефть и воду, поэтому предположим, что закачиваемые жидкости содержат консервативные трассеры. Трассер, растворимый в нефти, совершенно не растворяется в воде, а трассер, растворимый в воде, аналогичным образом нерастворим в нефти. Теперь процесс представляет собой вытеснение водонефтяной смеси меченой смесью воды и нефти. Для упрощения предположим, что трассеры совсем не влияют на функции движения отдельных фаз. Удельная скорость волны меченой воды – резидентной воды равна

$$v_{1'} = \frac{\partial(C_{11}f_1)}{\partial(C_{11}S_1)} = \frac{f_1}{S_1} \quad (5.4-8a)$$

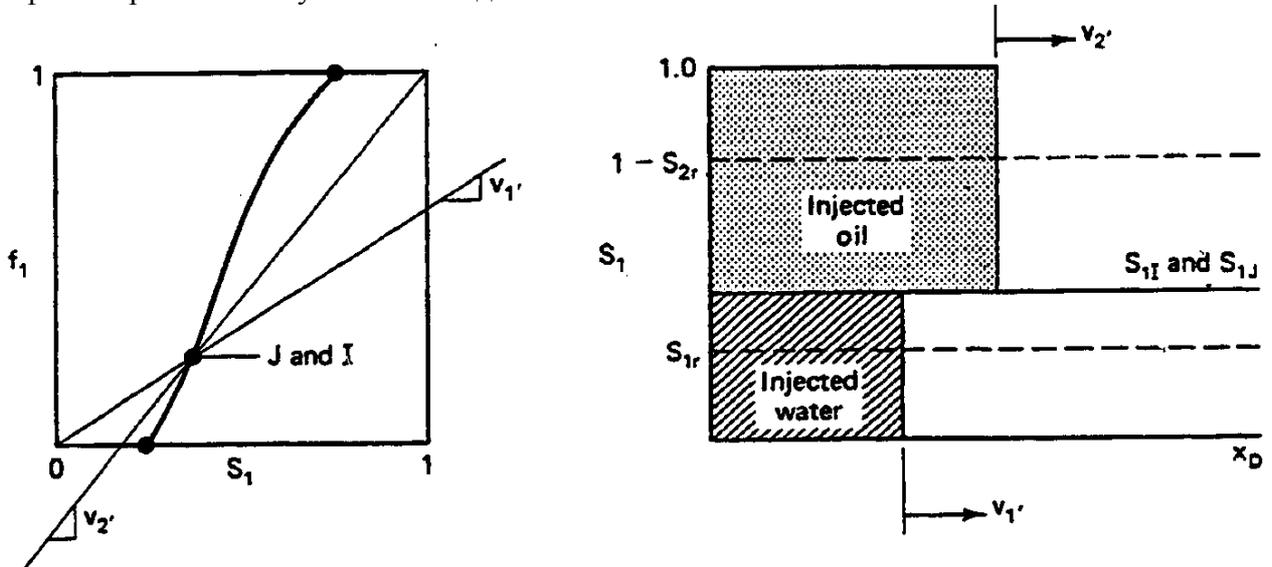
из уравнения (5.4-5a), где C_{11} – концентрация трассера в воде. Аналогичным образом, удельная скорость меченой нефти составляет

$$v_{2'} = \frac{f_2}{S_2} = \frac{1-f_1}{1-S_1} \quad (5.4-8b)$$

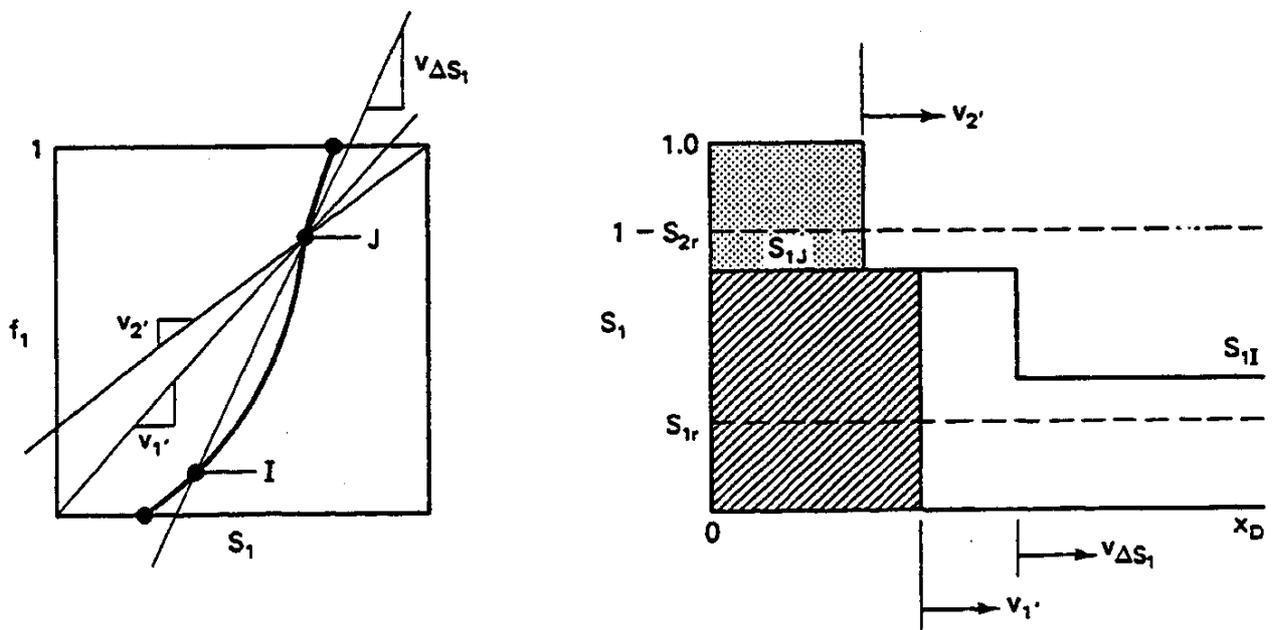
$v_{1'}$ и $v_{2'}$ - не зависят от концентрации трассера; отсюда, волны смешивающейся меченой воды и нефти не имеют значения. Конечно, т.к. ни один из трассеров не влияет на f_1 , скорость

насыщения водой, меченой или немеченой, дается уравнением (5.2-10) или уравнением (5.2-12). Значения f_1 и S_1 в уравнении (5.4-8) определяются характером водонефтяной волны.

На Рис.5-12 представлены некоторые случаи, которые могут возникнуть в ходе этого вытеснения. На каждом графике кривая движения отдельных фаз находится слева, а профиль насыщенности – концентрации – справа. В случае А $S_{1I} = S_{1J}$, и удельные скорости представлены углами наклона прямых линий, проходящих через $(0, 0)$ и $(f_1, S_1)_J$ и $(1, 1)$ и $(f_1, S_1)_J$, соответственно, что следует из уравнений (5.4-8a) и (5.4-8b). $v_2' > v_1'$, и волна меченой нефти опережает волну меченой воды.

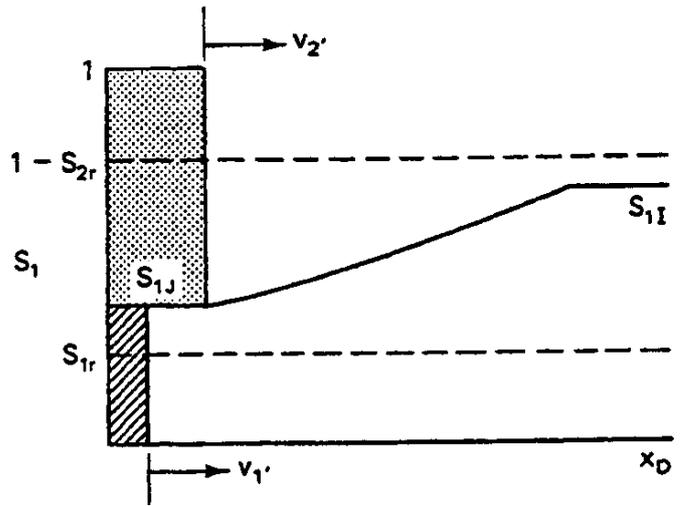
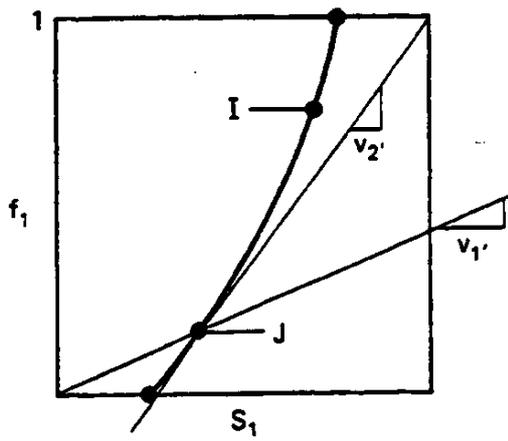


(a) Случай А

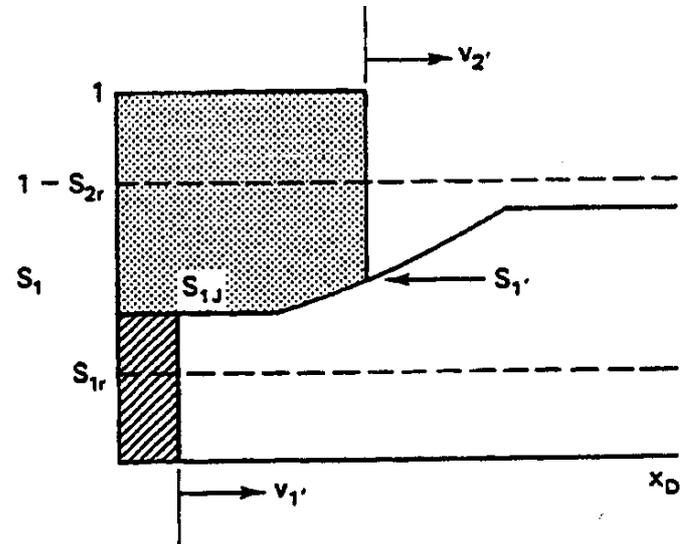
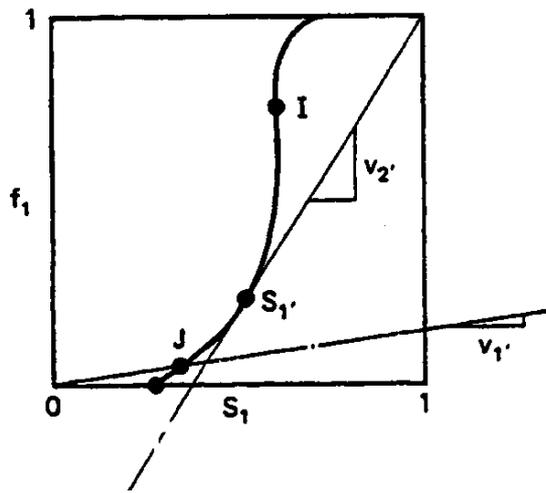


(b) Случай В

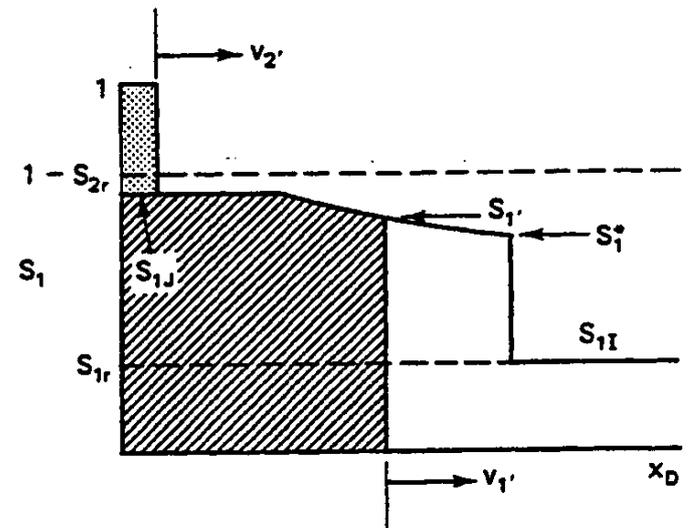
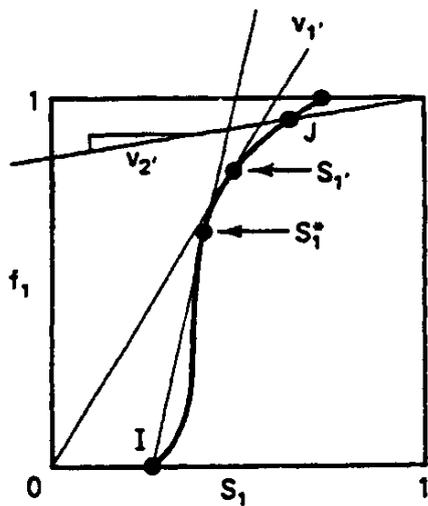
Рис.5-12 Иллюстрация различных частично смешивающихся вытеснений



(c) Случай С



(d) Случай D



(e) Случай E

Рис.5-12 Продолжение

В случае В $S_{1J} > S_{1I}$, а кривая f_1 такова, что водонефтяная волна является импульсом. Обе меченые волны отстают от водонефтяной волны. Область между меченой водой и водонефтяными волнами содержит «вал» резидентной воды, которая будет добываться до прорыва закачанной воды. Такой прорыв вала резидентной волны наблюдался в экспериментах (Браун, 1957), хотя дисперсия в таких вытеснениях довольно большая (см. Рис.5-18).

Случай С иллюстрирует распространяющуюся водонефтяную волну при $v_{2'} > v_{1'}$, но при этом все меченые волны концентрации имеют скорость меньшую, чем самая низкая скорость насыщения при S_{1J} .

Случай D – то же, что и Случай С, только кривая движения отдельных фаз является более выпуклой вверх. Эта форма является причиной большего распространения водонефтяной волны и снижения фронта меченой нефти где-то в распространяющейся части водонефтяной волны. Насыщенность $S_{1'}$, чья скорость такая же, как у волны меченой нефти, дается как:

$$v_{2'} = \frac{1 - f_1(S_{1'})}{1 - S_{1'}} = \left(\frac{df_1}{dS_1} \right)_{S_{1'}} \quad (5.4-9)$$

Линия, чей угол наклона представлен $v_{2'}$, не проходит через S_{1J} , как это было во всех предыдущих случаях. Это обусловлено тем, что линия, проходящая через $(1, 1)$ и $(S_{1'}, f_1)_{J'}$, имела бы вторую точку пересечения с кривой движения отдельных фаз в многофазовом потоке. Фронт меченой нефти продвигался бы в таком случае при двух разных водонасыщенностях, что физически невозможно.

Случай E – традиционный случай Баклея-Левретта- представляет собой ситуацию, противоположную случаю D, при которой уже фронт меченой воды перемещается в области распространяющейся зоны. Вытеснение нефти водой в случае E является смешанным, тогда как в случае В – распространяющимся.

Важными моментами на Рис.5-12 являются следующие:

1. Как было принято, ни меченая нефть, ни меченая вода не вызывают отклонения в характере вытеснения нефти водой. Когда образуются валы резидентных жидкостей, они это делают в своих соответствующих фазах.
2. Можно легко представить, что меченой нефтью является углеводород менее ценный, чем нефть. Теперь фронты трассеров приобретают дополнительное значение, т.к. эти смешивающиеся фронты теперь вытесняют резидентную нефть. В свою очередь, резидентная нефть полностью вытесняется. Таким образом, предельный E_D в этих идеализированных вытеснениях равен 1.0. Этот максимальный коэффициент бывает без уменьшения межфазного натяжения, изменения смачиваемости или уменьшения подвижности.

Конечно, мы еще не открыли жидкость, которая была бы одновременно дешевле нефти и смешивалась бы с ней, а так же не влияла бы на свойства переноса углеводородов. Эти изменения могут снизить конечный коэффициент вытеснения до величины меньшей, чем 1; все же идея вытеснения смешивающимися жидкостями или жидкостями, которые разовьют смешиваемость, является центральной концепцией Главы 7.

5.5 Рассеивание в смешивающихся вытеснениях

Так как смешивающиеся волны умогнительно являются индифферентными, они также восприимчивы к рассеиванию. Безусловно, наиболее известными рассеивающими действиями в смешивающихся вытеснениях являются дисперсия и образование языков в результате разности вязкостей. Последнее является двухмерным эффектом, поэтому мы отложим его обсуждение до Глав 6 и 7. В этом разделе мы рассмотрим влияние дисперсии на смешиваемый фронт.

Решение функции ошибок

Рассмотрим теперь изотермическое смешивающееся вытеснение какого-то компонента другим компонентом, который полностью смешивается с первым, в одномерной, однородной, проницаемой среде. Уравнение конвекции-диффузии (2.4-7) описывает сохранение вытесняющего компонента с помощью концентрации массы C .

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - \phi K_l \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (5.5-1)$$

Уравнение (5.5-1) также предполагает несжимаемую жидкость и породу, идеальное смешивание и одну фазу при удельной насыщенности. Последующий вывод имеет силу в том случае, если присутствуют другие фазы (Делшад, 1981), и до тех пор пока все движения отдельных фаз и насыщенности постоянны (см. Пример 5М). K_l является коэффициентом продольной дисперсии. В безразмерном виде уравнение (5.5-1) становится уравнением:

$$\frac{\partial C}{\partial t_D} + \frac{\partial C}{\partial x_D} - \frac{1}{N_{Pe}} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x_D^2} = 0 \quad (5.5-2)$$

которое решается при следующих граничных и начальных условиях для $C(x_D, t_D)$:

$$C(x_D, 0) = C_I, \quad x_D \geq 0 \quad (5.5-3a)$$

$$C(x_D \rightarrow \infty, t_D) = C_I, \quad t_D \geq 0 \quad (5.5-3b)$$

$$C(0, t_D) = C_J, \quad t_D \geq 0 \quad (5.5-3c)$$

где C_I и C_J представляют собой начальный и закачанный составы, соответственно. В уравнении (5.5-2), N_{Pe} , число Пекле, определяется как:

$$N_{Pe} = \frac{uL}{\phi K_l} \quad (5.5-4)$$

что представляет собой отношение конвективного переноса к дисперсионному. N_{Pe} представляет собой аналог N_{RL} для несмешивающихся вытеснений, что видно при сравнении уравнений (5.3-3) и (5.5-2). Это вытеснение должно происходить при постоянном u в отличие от уравнения (5.2-6b). Уравнение и граничные условия содержат три независимых параметра C_I , C_J и N_{Pe} , но проблема может быть заново сформулирована только с N_{Pe} в качестве параметра, путем определения безразмерной концентрации C_D

$$C_D = \frac{C - C_I}{C_J - C_I} \quad (5.5-5)$$

С этим определением уравнение и граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial C_D}{\partial t_D} + \frac{\partial C_D}{\partial x_D} - \frac{1}{N_{Pe}} \cdot \frac{\partial^2 C_D}{\partial x_D^2} = 0 \quad (5.5-6)$$

$$C_D(x_D, 0) = 0, \quad x_D \geq 0 \quad (5.5-7a)$$

$$C_D(x_D \rightarrow \infty, t_D) = 0, \quad t_D \geq 0 \quad (5.5-7b)$$

$$C_D(x_D \rightarrow \infty, t_D) = 1, \quad t_D \geq 0 \quad (5.5-7c)$$

Мы заменили исходное граничное условие при $x_D=0$ (уравнение 5.5-3с) на условие, когда $x_D \rightarrow -\infty$ (уравнение 5.5-7с). Это приближение для упрощения последующего вывода аналитического решения. Приближенное решение, полученное таким образом, будет иметь силу, строго говоря, при большом t_D или большом N_{Pe} , где влияние входных граничных условий проявляется как если бы расстояние от фронта вытеснения было большим. На практике получаемое приближенное аналитическое решение точно описывает однофазные вытеснения для всех случаев, за исключением предельных.

Первым этапом при выведении $C_D(x_D, t_D)$ является преобразование уравнений (5.5-6) и (5.5-7) в систему текущих координат x'_D , где $x'_D = x_D - t_D$. Это можно сделать, рассматривая C_D как функцию x_D и t_D , где дифференциальное изменение в C_D , обусловленное дифференциальными изменениями в x_D и t_D , равно:

$$dC_D = \left(\frac{\partial C_D}{\partial t_D} \right)_{x_D} dt_D + \left(\frac{\partial C_D}{\partial x_D} \right)_{t_D} dx_D \quad (5.5-8a)$$

Но dC_D , рассматриваемая как функция x'_D и t_D , представляет собой:

$$dC_D = \left(\frac{\partial C_D}{\partial t_D} \right)_{x'_D} dt_D + \left(\frac{\partial C_D}{\partial x'_D} \right)_{t_D} dx'_D \quad (5.5-8b)$$

Дифференциальные изменения в переменных равны, независимо от системы координат, в которой они рассматриваются. Следовательно, правые части уравнений (5.5-8a) и (5.5-8b) равны. Но x'_D является известной функцией x_D и t_D , из которой

$$dx'_D = dx_D - dt_D \quad (5.5-9)$$

Когда dx'_D заменяется в вышеупомянутом равенстве, мы получаем:

$$\left[\left(\frac{\partial C_D}{\partial x_D} \right)_{t_D} - \left(\frac{\partial C_D}{\partial x'_D} \right)_{t_D} \right] dx_D + \left[\left(\frac{\partial C_D}{\partial t_D} \right)_{x_D} - \left(\frac{\partial C_D}{\partial t_D} \right)_{x'_D} + \left(\frac{\partial C_D}{\partial x'_D} \right)_{t_D} \right] dt_D = 0 \quad (5.5-10)$$

Так как x_D и t_D являются независимыми переменными, dx_D и dt_D не связаны линейной зависимостью; следовательно члены в скобках в уравнении (5.5-10) равны нулю, что дает

$$\left(\frac{\partial C_D}{\partial x_D} \right)_{t_D} = \left(\frac{\partial C_D}{\partial x'_D} \right)_{t_D} \quad (5.5-11a)$$

$$\left(\frac{\partial C_D}{\partial t_D} \right)_{x_D} = \left(\frac{\partial C_D}{\partial t_D} \right)_{x'_D} - \left(\frac{\partial C_D}{\partial x'_D} \right)_{t_D} \quad (5.5-11b)$$

При их подстановке в уравнение (5.5-6) получаем

$$\left(\frac{\partial C_D}{\partial t_D} \right)_{x'_D} - \frac{1}{N_{Pe}} \cdot \frac{\partial^2 C_D}{\partial (x'_D)^2} = 0 \quad (5.5-12)$$

граничные условия сохраняют вид уравнения (5.5-7), благодаря замене входного граничного условия при $x_D=0$ условием когда $x_D \rightarrow -\infty$.

Уравнение (5.5-12) является теперь уравнением теплопроводности, решить которое можно методом комбинирования переменных (Берд и др., 1960). Чтобы выполнить это мы определим еще одну безразмерную переменную $\eta = x'_D / 2\sqrt{t_D / N_{Pe}}$, с помощью которой определяющие уравнения и граничные условия могут быть преобразованы в

$$2\eta \frac{dC_D}{d\eta} + \frac{d^2 C_D}{d\eta^2} = 0 \quad (5.5-13a)$$

$$C_D(\eta \rightarrow \infty) = 0 \quad (5.5-13b)$$

$$C_D(\eta \rightarrow 0) = 1 \quad (5.5-13c)$$

Исходя из требования успешного преобразования уравнения частных производных и обычное дифференциальное уравнение, условия (уравнения 5.5-7а и 5.5-7b) сводятся к единому условию (уравнение 5.5-13b). Преобразование в обычное дифференциальное уравнение иногда называется преобразованием Больцмана. Уравнения (5.5-13) могут разделяться и интегрироваться дважды, давая

$$C_D = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du \right) \quad (5.5-14)$$

Произведение, умноженное на интеграл в правой части уравнения (5.5-14), является функцией ошибки – широко используемым табулированным интегралом (см. Таблицу 5-2 и Рис. 5-13), обозначаемым $erf(\eta)$. Подставляя определения для η и x'_D , мы получаем окончательный вид приближенного аналитического решения.

$$C_D = \frac{1}{2} \left[1 - erf \left(\frac{x_D - t_D}{2\sqrt{\frac{t_D}{N_{Pe}}}} \right) \right] = \frac{1}{2} erfc \left(\frac{x_D - t_D}{2\sqrt{\frac{t_D}{N_{Pe}}}} \right) \quad (5.5-15)$$

<i>x</i>		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>d</i>
0.0	0.0	000	113	226	338	451	564	676	789	901	*013	113
1	0.1	125	236	348	459	569	680	790	900	*009	*118	111
2	0.2	227	335	443	550	657	763	869	974	*079	*183	106
3	0.3	286	389	491	593	694	794	893	992	*090	*187	100
4	0.4	284	380	475	569	662	755	847	937	*027	*117	93
5	0.5	205	292	379	465	549	633	716	798	879	959	84
6	0.6	039	117	194	270	346	420	494	566	638	708	74
7		778	847	914	981	*047	*112	*175	*238	*300	*361	65
8	0.7	421	480	538	595	651	707	761	814	867	918	56
9		969	*019	*068	*116	*163	*209	*254	*299	*342	*385	46
1.0	0.8	427	468	508	548	586	624	661	698	733	768	38
1		802	835	868	900	931	961	991	*020	*048	*076	30
2	0.9	103	130	155	181	205	229	252	275	297	319	24
3		340	361	381	400	419	438	456	473	490	507	19
4	0.95	23	39	54	69	83	97	*11	*24	*37	*49	14
5	0.96	61	73	84	95	*06	*16	*26	*36	*45	*55	10
6	0.97	63	72	80	88	96	*04	*11	*18	*25	*32	8
7	0.98	38	44	50	56	61	67	72	77	82	86	6
8		91	95	99	*03	*07	*11	*15	*18	*22	*25	4
9	0.99	28	31	34	37	39	42	44	47	49	51	3
2.0	0.995	32	52	72	91	*09	*26	*42	*58	*73	*88	17
1	0.997	02	15	28	41	53	64	75	85	95	*05	11
2	0.998	14	22	31	39	46	54	61	67	74	80	8
3		86	91	97	*02	*06	*11	*15	*20	*24	*28	5
4	0.999	31	35	38	41	44	47	50	52	55	57	3
5		59	61	63	65	67	69	71	72	74	75	2
6		76	78	79	80	81	82	83	84	85	86	1
7		87	87	88	89	89	90	91	91	92	92	1
8	0.9999	25	29	33	37	41	44	48	51	54	56	3
9		59	61	64	66	68	70	72	73	75	77	2

Таблица 5-2 Табулированные значения $\text{erf}(x)$ (из Джанке и Эмде, 1945)

где erfc обозначает функцию дополнительной ошибки. Точное аналитическое решение, выведенное преобразованиями Лапласа (Марле, 1981), представляет собой

$$C_D = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{x_D - t_D}{2 \sqrt{\frac{t_D}{N_{Pe}}}} \right) + \frac{e^{x_D N_{Pe}}}{2} \text{erfc} \left(\frac{x_D + t_D}{2 \sqrt{\frac{t_D}{N_{Pe}}}} \right) \quad (5.5-16)$$

Второй член в уравнении (5.5-16) экспоненциально стремится к нулю по мере роста x_D и N_{Pe} .

На Рис. 5-14 показаны профили концентрации C_D в зависимости от x_D при изменяющихся t_D и N_{Pe} . По мере увеличения N_{Pe} профиль концентрации приближается к ступенчатой функции при $x_D = t_D$, как предполагается уравнением (5.4-7). Фактически, профиль концентрации, данный

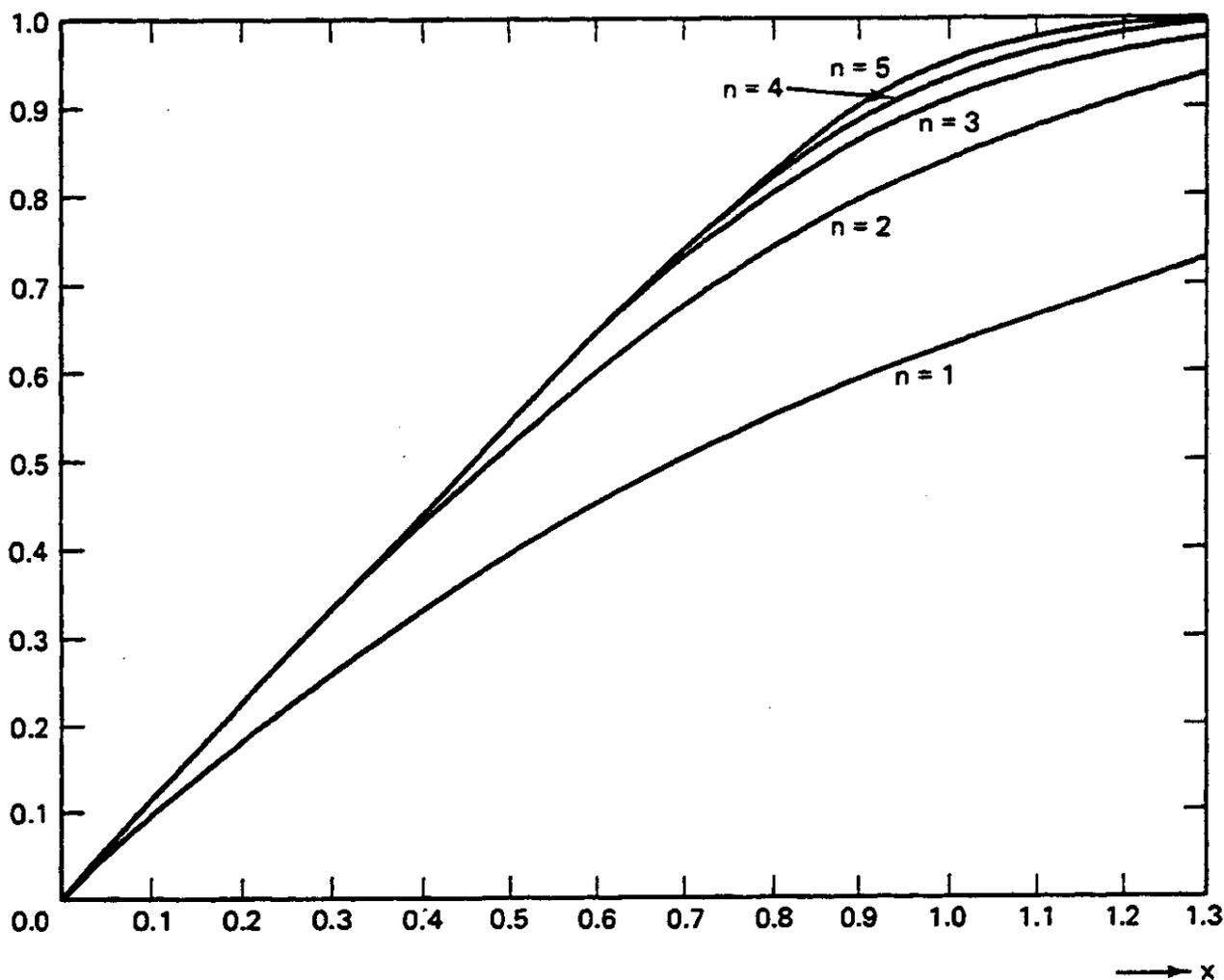


Рис. 5-13 Функция $E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^{x^n} e^{-v} v^{(1/n)-1} dv$, где $n=2$, является функцией ошибки (Джанке и Эмдэ, 1945)

уравнением (5.5-15), является симметричным с центром в этой точке. Полное решение (уравнение 5.5-16) не является симметричным, но как мы уже отметили, этот эффект небольшой. Поэтому, дисперсия не влияет на скорость распространения волны, но влияет на степень смешивания в волне.

Коэффициент вытеснения для вытесняемого компонента равен

$$E_D = \bar{C}_D = \int_0^1 C_D(x_D, t_D) dx = \left(\frac{\sqrt{t_D}}{N_{Pe}} \right) \left[\text{ierfc} \left(\frac{-\sqrt{N_{Pe} t_D}}{2} \right) - \text{ierfc} \left(\frac{1-t_D}{2\sqrt{\frac{t_D}{N_{Pe}}}} \right) \right] \quad (5.5-17)$$

где $\text{ierfc}(x) = \int_x^\infty \text{erfc}(\xi) d\xi$, где интегральная функция дополнительной ошибки также табулирована (Карсло и Джагер, 1959). На Рис. 5-15 представлен график зависимости E_D от t_D при разных значениях N_{Pe} . E_D уменьшается при постоянном t_D по мере увеличения дисперсии. Так как смешивающиеся вытеснения не имеют остаточных фазовых насыщенных, E_D приближается к 1 по мере того, как возрастает t_D . На Рис. 5-14 и 5-15 показано более сильное

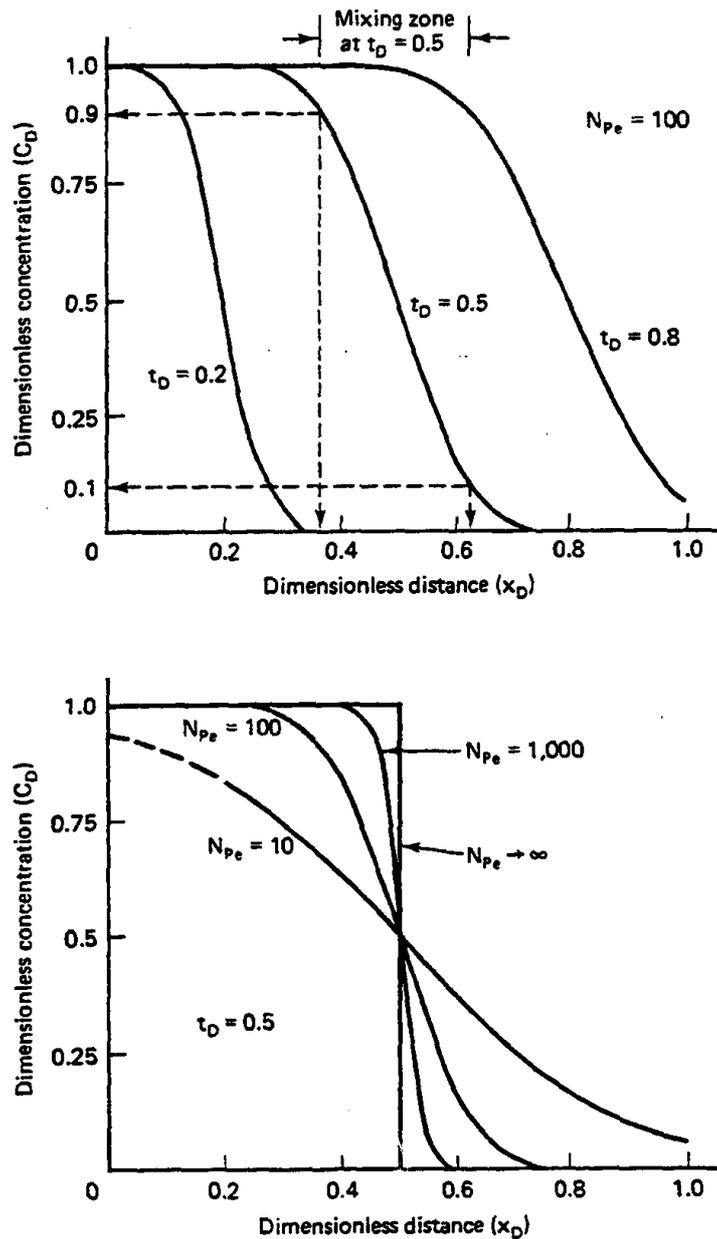


Рис. 5-14 Безразмерные профили концентрации

влияние N_{Pe} на профили концентрации, чем на коэффициент вытеснения; поэтому озабоченность по поводу отрицательного воздействия дисперсии на отдачу обычно ограничивается оторочками. Эту тему оставим до Раздела 7-6.

Из уравнения 5.5-15 следует безразмерная зона смешивания, расстояние между расстояниями, где $C_D=0.1$ и $C_D=0.9$.

$$\Delta x_D = x_D|_{C_D=0.1} - x_D|_{C_D=0.9} = 3.625 \sqrt{\frac{t_D}{N_{Pe}}} \quad (5.5-18)$$

Чтобы получить это преобразуем уравнение (5.5-15) при $x_D|_{C_D=0.1}$, что дает

$$x_D|_{C_D=0.1} = t_D + 2 \sqrt{\frac{t_D}{N_{Pe}}} \operatorname{erf}^{-1}(0.8)$$

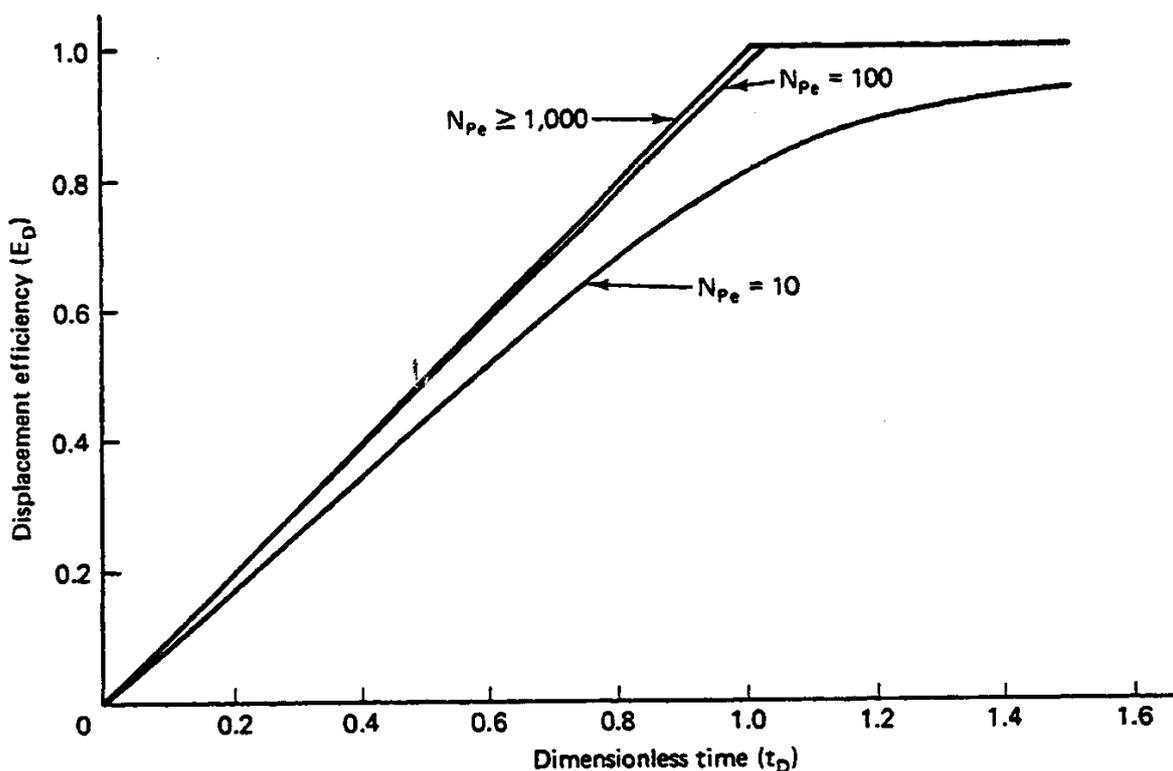


Рис. 5-15 Коэффициент вытеснения при одномерных смешивающихся вытеснениях

Аналогичная процедура дает $x_D|_{C_D=0.9}$ и эти значения, подставленные в определения Δx_D дает уравнение 5.5-18. Уравнение 5.5-18 показывает, что зоны дисперсионного смешивания растут пропорционально квадратному корню времени. Несмешивающиеся зоны смешивания растут пропорционально времени. Рост, предполагаемый уравнением 5.5-18, обычно более медленный, чем рост для несмешивающейся зоны смешивания, особенно, если N_{Re} велико. Этот медленный рост является частичным обоснованием для отбрасывания дисперсии при моделировании полусмешивающихся вытеснений, в сравнении с эффектами движения отдельных фаз в многофазовом потоке.

Δx_D также может использоваться для сравнения длин зон смешивания в лабораторных и промышленных испытаниях. Несмешивающиеся зоны смешивания не содержат свободных параметров, если рассеяние невелико. Поэтому, если мы проводим лабораторное несмешивающееся заводнение в условиях, по возможности наиболее приближенных к промышленным (вытеснение на природных кернах или кернах с воспроизведенными пластовыми условиями, при пластовой температуре и давлении, при использовании пластовых жидкостей), значение Δx_D , полученное в лабораторных условиях, будет такое же, как и в промышленных условиях.

В смешивающихся вытеснениях мы обычно не в состоянии уравнивать лабораторные и промышленные значения N_{Re} . Кроме того, N_{Re} обычно меньше в лаборатории; поэтому Δx_D обычно бывает больше в лабораторных условиях, чем на промысле. Конечно, длина безразмерной зоны смешивания, $\Delta x_D L$, будет всегда больше в промышленных условиях, так как L там гораздо больше. Почему мы не в состоянии подобрать N_{Re} будет ясно из последующего обсуждения коэффициентов дисперсии.

Дисперсность

Беар (1972) предполагает, что «гидродинамическая» дисперсия представляет собой «макроскопический выход фактических движений отдельных частиц трассера через поры и различные физические и химические явления, которые происходят в порах». Это движение

может возникнуть по разным причинам. В данном тексте *дисперсия* – это смешивание двух смешивающихся жидкостей, обусловленное диффузией, локальными градиентами скорости (например, между стенкой поры и центром поры), локально различной длиной путей потока и механическим смешиванием в порах. Образование языков в результате разности плотностей и вязкостей является двухмерным эффектом, который мы рассмотрим в Главе 6. Здесь мы подытожим экспериментальные данные по коэффициентам дисперсии и приведем некоторые качественные причины для этих наблюдений.

Для одномерного потока коэффициент продольной дисперсии K_l дается уравнением

$$\frac{K_l}{D_0} = C_1 + C_2 \left(\frac{|v| D_p}{D_0} \right)^\beta \quad (5.5-19)$$

где C_1 , C_2 и β – свойства проницаемой среды и режима течения. D_0 – это эффективный двоичный коэффициент молекулярной диффузии между смешивающимися вытесняющей и вытесняемой жидкостями. D_p – это средний диаметр частиц.

При очень медленных течениях второй член в уравнении (5.5-19) не учитывается, а K_l пропорционален D_0 . Этот случай аналогичен медленному вытеснению в широком канале, где смешивание обусловлено полностью молекулярной диффузией. Определили, что константа C_1 равна $1/\phi F$, где F – это коэффициент удельного сопротивления пласта (Пирсон, 1983), учитывающий присутствие стационарной фазы.

При более быстрых вытеснениях второй член уравнения (5.5-19) становится существенным. Динз (1963) показал, что последовательно установленные емкости с хорошим перемешиванием дают зоны смешивания, которые могут описываться коэффициентами дисперсии, пропорциональными скорости. Здесь смешивание – это результат сильно нерегулярных путей потока, которые заставляют жидкости полностью смешиваться по мере их добычи из каждого элемента. Диффузия, конечно, незначительна, если жидкости хорошо перемешаны.

Альтернативной двумерной интерпретацией, включающей диффузию в этом режиме течения, является теория Тейлора (1953), посредством которой обнаружены каналы течения, имеющие гораздо меньшие поперечные размеры, чем продольные. При этой идеализации диффузия уравнивает градиенты концентрации в поперечном направлении, давая начало «эффективному» коэффициенту диффузии. Смешивание теперь является результатом поперечной диффузии и изменений скорости, обусловленных отсутствием скольжения у стенки поры. Теория Тейлора прогнозирует коэффициенты диффузии, пропорциональные квадрату скорости.

Опытным путем обнаружено (Перкинс и Джонстон, 1963), что $\beta = 1-1.25$ в уравнении (5.5-19); следовательно, интерпретация локального смешивания, по-видимому, ближе к цели, чем теория Тейлора.

Этот режим локального смешивающегося течения отмечается там, где происходит большинство процессов повышения нефтеотдачи. По сути, если промежуточная скорость больше примерно 3 см / сутки, член локального смешивания в уравнении (5.5-19) доминирует над первым членом, и мы можем записать

$$K_l = \frac{D_0}{\phi F} + C_2 \left(\frac{|v| D_p}{D_0} \right)^\beta D_0 \cong \alpha_l |v| \quad (5.5-20)$$

Это не означает, что диффузия безусловно незначительна в смешивающемся потоке. Несколько явлений вызывают течение вокруг застойных областей (например, тупиковые поры, поры, заблокированные водой, или примыкающие зоны, в которых отсутствует течение), где скорости диффузии имеют большое значение даже при режимах, которые в противном случае

могли бы быть хорошо описаны уравнением (5.5-20). α_ℓ в уравнении (5.5-20) представляет собой продольную дисперсность проницаемой среды (уравнение 2.2-14) – критерий локальной неоднородности. Беар (1970) классифицирует α_ℓ как одно из фундаментальных свойств среды. При режиме локального смешивающегося потока α_ℓ является более фундаментальным критерием дисперсии, чем K_ℓ .

На Рис.5-16 представлен три режима течения по данным Перкинса и Джонстона (1963). Аналогичные данные есть у Беара (1970) и в нескольких ссылках Перкинса и Джонстона (1963).

Вид уравнения (5.5-20) очень удобен, т.к. число Пекле (уравнение 5.5-4) и равновесие безразмерных концентраций (уравнение 5.5-2) теперь становятся независимыми от скорости

$$N_{P_e} = \frac{L}{\alpha_\ell} \quad (5.5-21)$$

Следовательно, безразмерная зона смешивания непосредственно связана с α_ℓ через уравнение (5.5-18). Фактически α_ℓ/L можно приближенно рассматривать как длину безразмерной зоны смешивания.

Предположим, мы пытаемся разработать лабораторное вытеснение, с такой же длиной безразмерной зоны смешивания, что и в промышленных условиях. В таком случае мы должны иметь

$$\left(\frac{\alpha_\ell}{L}\right)_{field} = \left(\frac{\alpha_\ell}{L}\right)_{lab} \quad (5.5-22)$$

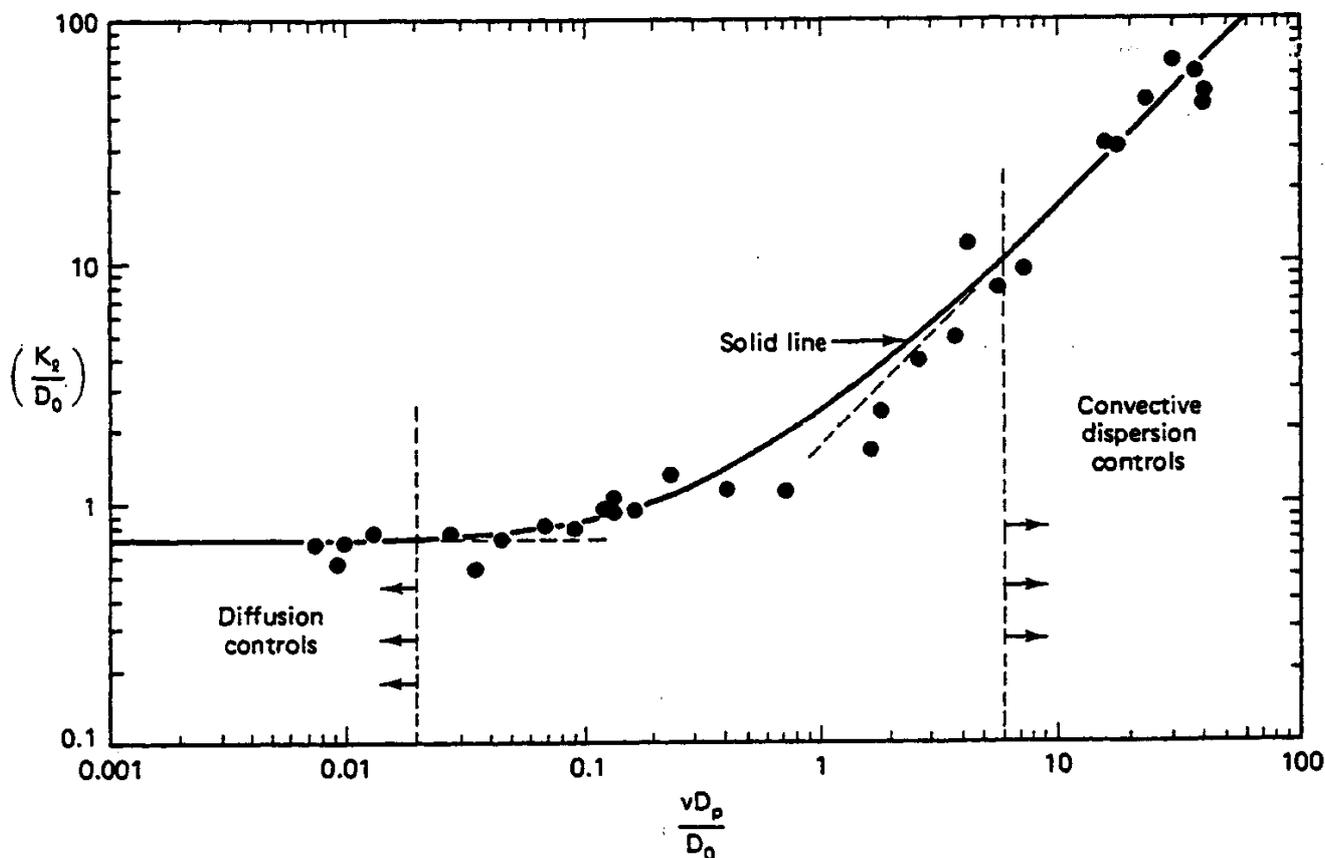


Рис.5-16 Коэффициенты продольной дисперсии при течении через проницаемую среду (Перкинс и Джонстон, 1963)

Несомненно, условия уравнения (5.5-22) не могут быть удовлетворены, если лабораторные и промышленные дисперсности принимаются равными.

Чтобы осуществить равенство в уравнении (5.5-22) у нас должны быть лабораторные и промышленные данные α_ℓ . Значения α_ℓ , полученные в лабораторных условиях, определяют путем корреляций или опытным путем. Они обычно составляют несколько сантиметров или меньше, в зависимости от кернового материала. Значения α_ℓ , определяемые в промышленных условиях, менее точны. Хорошая сводка данных дисперсности, полученных в промышленных условиях, представлена на Рис.5-17. Этот рисунок показывает значения α_ℓ , замеренные на промысле для нескольких типов пластов, представленные в виде графика зависимости от масштаба длины, на которой производился замер. В двойном логарифмическом масштабе, несомненно, отмечается значительное изменение в α_ℓ при той же длине и даже для того же пласта, хотя корреляция с последним незначительная или отсутствует вообще.

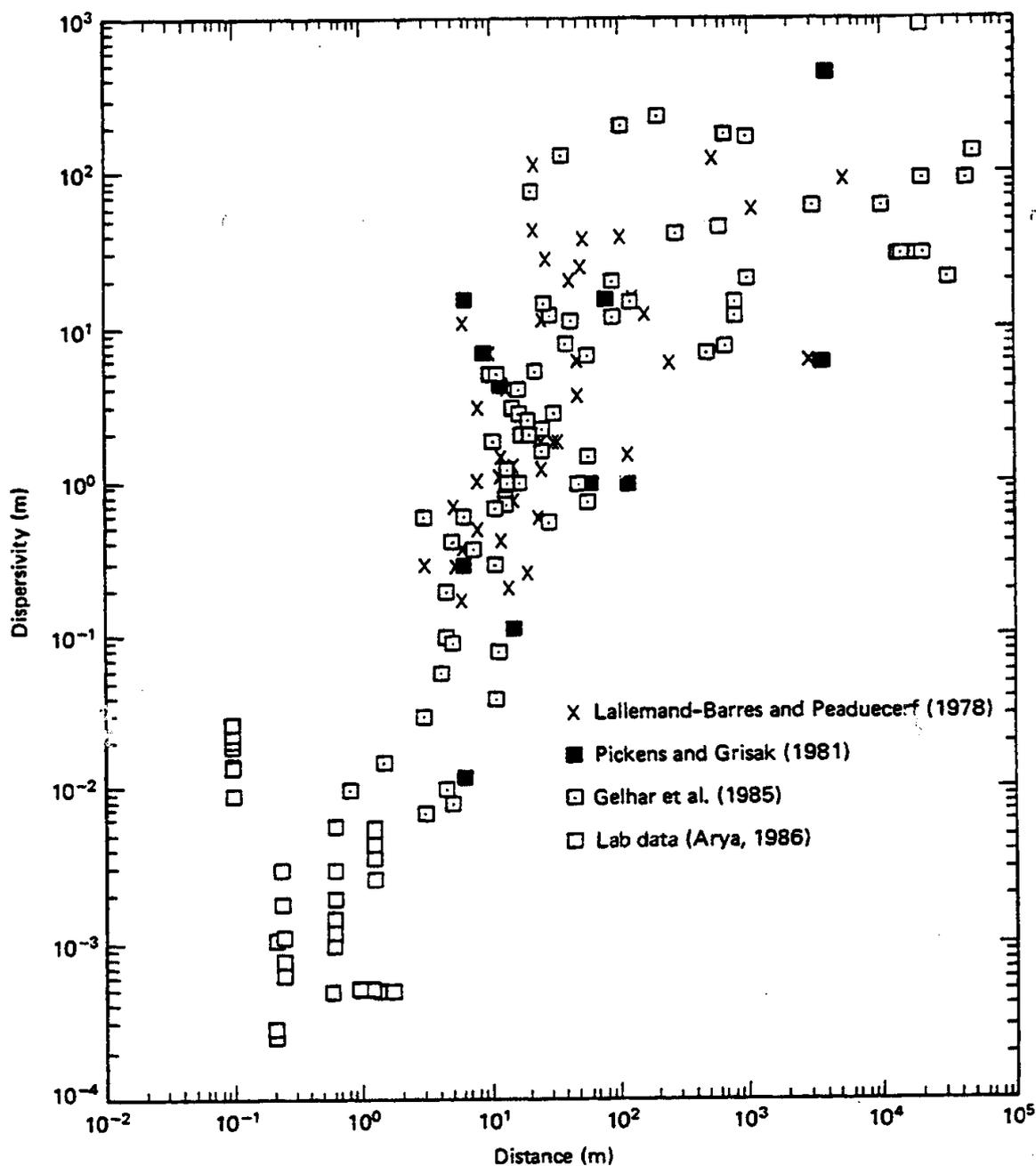


Рис.5-17 Дисперсность, замеренная в промышленных и лабораторных условиях (Ариа и др., 1988)

Несмотря на разброс, прослеживается четкая тенденция увеличения α_ℓ с увеличением расстояния измерения. Мы можем объяснить это увеличение с качественной точки зрения, сказав, что масштаб неоднородности, зафиксированный данным измерением, возрастает с увеличением объема, выбранного в качестве образца. С количественной точки зрения это явление является предметом активного исследования (Гелхар и др., 1979; Даган, 1984) из-за сложного взаимодействия между неоднородностью, коэффициентами локальной дисперсии, диффузией и другими свойствами проницаемых сред, которые в сочетании делают α_ℓ зависимой от длины.

На Рис.5-17 показано интересное и значимое поведение α_ℓ по мере того, как увеличивается макроскопическая длина системы. Но даже в локальном масштабе характер продольной дисперсности при течении нескольких фаз недостаточно хорошо изучен. На Рис.5-18 представлены экспериментальные данные, показывающие каким образом изменяется внутрифазовая дисперсность по мере изменения фазового насыщения. Данные, представленные на этом рисунке, относятся к потоку мицеллярных жидкостей постоянной насыщенности, для которого подходит более общее определение K_ℓ (уравнение 2.2-14). Рис. 5-18 показывает, что дисперсность водной фазы может возрасть более чем в 10 раз по мере уменьшения насыщенности водной фазы. (Эта дисперсность возрастает по мере увеличения эффективной неоднородности, но теперь «неоднородность» должна иметь отношение к характеристикам текущих жидкостей.)

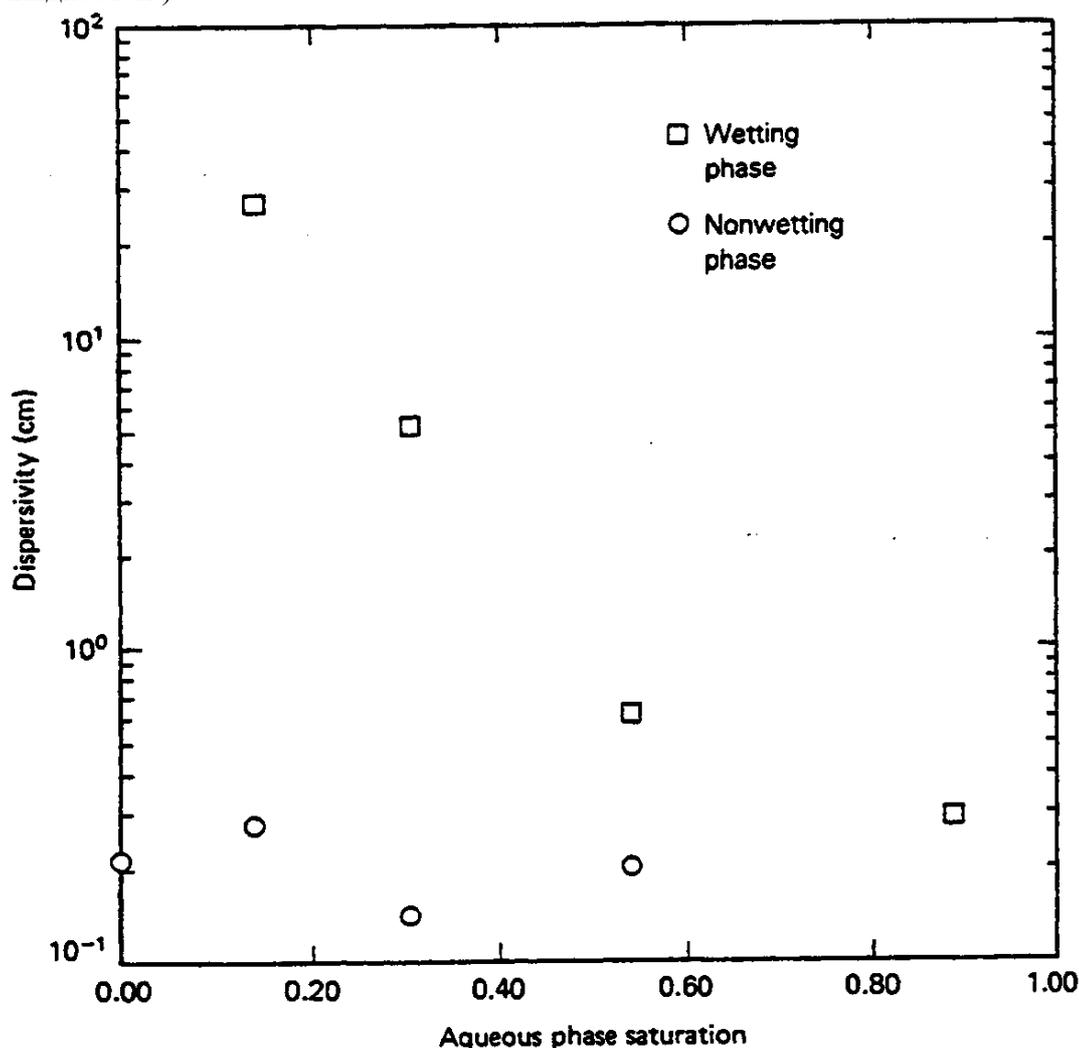


Рис. 5-18 Дисперсность при смешивающихся потоках постоянной насыщенности (МакАллистер, 1982)

Вероятно, условия смачивания играют большую роль в увеличении α_ℓ , так как в случае не смачивающей фазы (Рис. 5-18) таких изменений в α_ℓ не отмечалось.

Подведем итог наиболее важных моментов, связанных с влиянием дисперсии на одномерное смешивающееся течение:

1. Дисперсия регулирует скорость смешивания двух жидкостей, но не влияет на скорость волны.
2. Дисперсные смешивающиеся зоны увеличиваются пропорционально квадратному корню времени.
3. Скорость жидкости в большинстве процессов повышения нефтеотдачи такова, что поток находится в режиме локального смешивания, при котором коэффициент дисперсии пропорционален промежуточной скорости. Константа пропорциональности является продольной дисперсностью α_ℓ .
4. α_ℓ является критерием неоднородности проницаемой среды и изменяется с изменением фазовой насыщенности и масштаба измерения.
5. Нельзя не учитывать дисперсию при вытеснениях в промысловых масштабах, так как дисперсия, по-видимому, возрастает с пройденным расстоянием.

5-6 Обобщение теории движения отдельных фаз в многофазовом потоке

В этом разделе мы представляем математические формальности, позволяющие расширить теории движения отдельных фаз в многофазовом потоке, представленные в Разделах 5-2 и 5-4, до случая многокомпонентного многофазового потока. Как и в вышеупомянутых разделах, мы не учитываем рассеивающие эффекты и ограничиваем уравнения условиями одномерного потока. Наше представление основано на способе решения методом характеристик, известном как теория простой волны или теория когерентности. (Математические подробности см. у Корант и Фридрихс, 1948; Гелферих и Клайн, 1970; Джеффри и Таниути, 1964.)

Основной принцип метода характеристик заключается в решении частных дифференциальных уравнений путем их преобразования в систему обыкновенных дифференциальных уравнений и последующего одновременного интегрирования. Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений редко может быть проинтегрирована в закрытом виде, но существует большой класс задач о потоке в проницаемой среде, для которых имеются интегрирования в общем виде. Чтобы проиллюстрировать эти идеи, рассмотрим сначала единичное частное дифференциальное уравнение, а затем пары частных дифференциальных уравнений при зависимых переменных u и v . Эта теория может быть обобщена для числа частных дифференциальных уравнений больше двух, но на практике эта процедура становится громоздкой.

Одна зависимая переменная

Рассмотрим следующее частное дифференциальное уравнение для $u(x, t)$

$$L(u) = Au_t + Bu_x + E = 0 \quad (5.6-1)$$

где A , B и E – известные функции u , x и t . Оператор $L(u)$ является линейным в производных u . Обозначения u_x и u_t означают частную дифференциацию относительно x и t при постоянной величине другой переменной. Мы хотим получить решение для уравнения (5.6-1) в виде $u(x, t)$ с учетом соответствующих начальных и граничных условий. При использовании метода характеристик мы ищем эти решения в виде $u(s)$, где s – это параметр вдоль кривой C в пространстве $x-t$, так что $x=x(s)$, а $t=t(s)$. Поэтому мы можем записать полную производную u относительно s , как

$$t_s = A \quad (5.6-2)$$

Уравнение (5.6-2) представляет собой смесь полных производных u_s , t_s и x_s и частных производных u_t и u_x . Однако, мы используем одно и тоже обозначение для обоих типов производных, так как тип производной должен быть понятен из употребления. Сравнение уравнений (5.6-1) и (5.6-2) дает

$$u_s = t_s u_t + x_s u_x \quad (5.6-3a)$$

$$x_s = B \quad (5.6-3b)$$

$$u_s = -E \quad (5.6-3c)$$

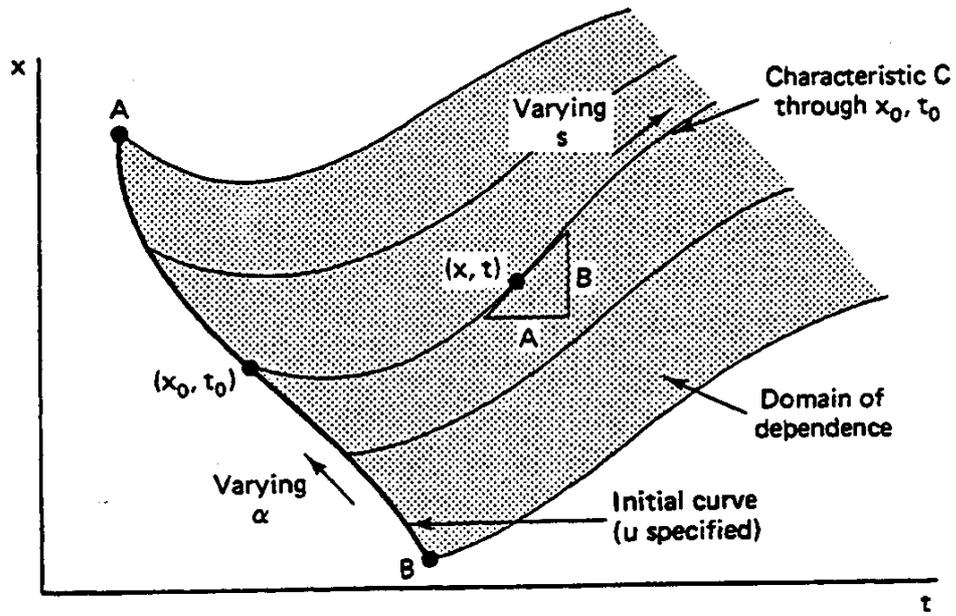
Уравнения (5.6-3), которые означают, что оператор $L(u)$ представляет собой направленную производную вдоль C , являются системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть проинтегрированы от начальной кривой, как показано на Рис. 5-19а, давая характеристическую кривую C в пространстве xt , вдоль которой u изменяется согласно интегрированию уравнения (5.6-3с).

Различные интегрирования возможны только в том случае, если C нигде не является касательной к начальной кривой. На Рис. 5-19(а) схематично показано интегрирование этих уравнений для кривой C , которая начинается в точке (x_0, t_0) на начальной кривой. Мы могли бы взять другие точки на начальной кривой и тем самым охватить затененную область зависимости на Рис. 5-19(а), определяемую характеристиками через точки A и B на начальной кривой. Если α – это параметр вдоль начальной кривой, решением для уравнений (5.6-3) является $t=t(s, \alpha)$, $x=x(s, \alpha)$ и $u=u(s, \alpha)$. s и α – это координаты естественной, криволинейной системы координат для уравнения (5.6-1). Так как α , в действительности, определяет кривую C , проходящую через точку (x, t) , в которой требуется определить значение u , характеристики для уравнения (5.6-1) представляют собой однопараметрическое (α) семейство кривых, а α – метка для этого однопараметрического семейства. Важным наблюдением является то, что в каждой точке (x, t) в затененной области на Рис. 5-19(а), угол наклона характеристической кривой дается как

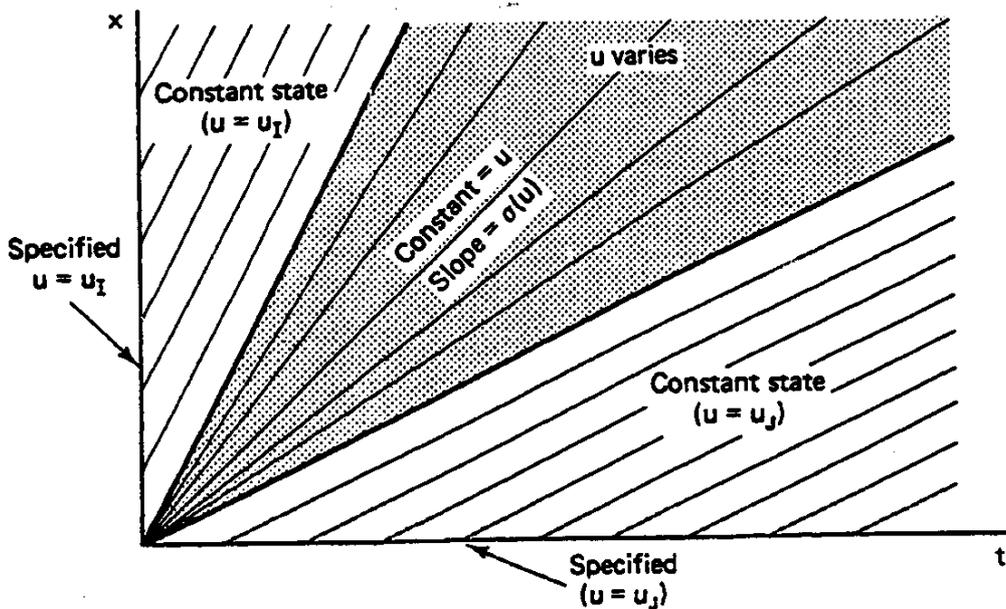
$$\frac{x_s}{t_s} = \frac{dx}{dt} \Big|_C = \frac{B}{A} = \sigma(u, x, t) \quad (5.6-4)$$

σ – характеристическое направление при заданных (x, t) . Уравнение (5.6-4) показывает, что, обычно, нет необходимости определять $t=t(s, \alpha)$ и $x=x(s, \alpha)$, так как то, что $t=t(s, \alpha)$ следует непосредственно из уравнений (5.6-4) и (5.6-3с).

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (5.6-1), где $E=0$, а A и B являются функциями только u . Исходные данные – это кривая, которая совпадает с осью x , где $u=u_l$ и затем совпадает



(a) Характеристическое построение для общей задачи о потоке с одной зависимой переменной



(b) Характеристическое построение для простой волны с одной переменной

Рис. 5-19 Области зависимости для гиперболических уравнений с одной переменной

с осью t , где $u = u_j$. Таким образом, граничные ($x = 0$) и начальные ($t = 0$) условия неизменны, за исключением ступенчатого изменения в начале координат, где существуют все значения u между u_1 и u_j . Из уравнений (5.6-3с) и (5.6-4) непосредственно следует, что u является постоянной величиной в соответствии с характеристиками C , которые сами представляют собой прямые линии. На Рис.5-19(b) представлены характеристики для этого случая. В областях, примыкающих к осям x и t , характеристики параллельны углам наклона $\sigma(u_1)$ и $\sigma(u_j)$, соответственно. Эти области являются областями устойчивого состояния, т.к. зависимая переменная u имеет в них постоянное значение. Затененная область на Рис.5.19(b) является веерообразной, где σ непрерывно изменяется в пределах областей устойчивого состояния.

Каждый луч, исходящий из начала координат, несет конкретное постоянное значение σ из бесконечного числа значений u в пределах u_i и u_j , и каждый имеет угол наклона σ , определенный при этом значении u . Следовательно, затененная область на Рис.5-19(a) является волной, т.к. в любом нехарактеристическом направлении u изменяется.

Из Рис.5-19(b) явствует, что характеристики не могут пересекаться, но нет ничего такого, что требовало бы монотонного уменьшения σ , как в показанном случае. Когда σ не уменьшается монотонно, существует математически обоснованное решение, которое ведет к образованию импульсных волн, причем u является физической переменной.

И наконец, характеристическое направление σ , несомненно, может быть интерпретировано в виде скорости (если x и t – это расстояние и время) и записано как:

$$\sigma = \left. \frac{dx}{dt} \right|_C = \left. \frac{dx}{dt} \right|_u \quad (5.6-5)$$

При соответствующих формах для A , B , t и x , уравнение (5.6-5) принимает вид уравнения Баклея – Леверетта (уравнение 5.2-10) для случая вытеснения нефти водой в проницаемой среде, как обсуждалось нами в Разделе 5-2. Отметьте сходство Рис.5-5 и 5-19(b).

Две зависимые переменные

Рассмотрим теперь пару дифференциальных уравнений в частных производных при зависимых переменных $u(x, t)$ и $v(x, t)$

$$L_1(u, v) = A_1 u_t + B_1 u_x + C_1 v_t + D_1 v_x + E_1 = 0 \quad (5.6-6a)$$

$$L_2(u, v) = A_2 u_t + B_2 u_x + C_2 v_t + D_2 v_x + E_2 = 0 \quad (5.6-6b)$$

Сначала мы рассмотрим наиболее общий случай коэффициентов $A - E$, являющихся функциями x , t , u и v . Первая пара членов в линейных операторах L_1 и L_2 могут рассматриваться как направленные производные u и v . Из полной производной du и dv имеются четыре таких направления $(A_1 u_t + B_1 u_x, C_1 v_t + D_1 v_x, \text{и так далее})$ для каждого дифференциального уравнения в частных производных. Но для того, чтобы преобразовать пару в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, мы ищем кривую в пространстве (x, t) , где $u = u(s)$, $v = v(s)$, $x = x(s)$ и $t = t(s)$. Следовательно, мы ищем комбинацию $L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ с тем, чтобы L была линейной функцией полных производных u_s и v_s . Как и раньше, s – это параметр такой кривой. Для получения решений к уравнениям, оператор L должен быть равен нулю, поэтому

$$L = (A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) u_t + (B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2) u_x + (C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2) v_t + (D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2) v_x + (E_1 \lambda_1 + E_2 \lambda_2) = 0 \quad (5.6-7)$$

Для того, чтобы направленные производные u и v были коллинеарными, необходимо, чтобы

$$\frac{x_s}{t_s} = \sigma = \frac{B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2}{A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2} = \frac{D_1 \lambda_1 + D_2 \lambda_2}{C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2} \quad (5.6-8)$$

было получено из полной производной для каждой зависимой переменной. Два уравнения в уравнении (5.6-8) могут быть записаны как

$$(A_1x_s - B_1t_s)\lambda_1 + (A_2x_s - B_2t_s)\lambda_2 = 0 \quad (5.6-9a)$$

$$(C_1x_s - D_1t_s)\lambda_1 + (C_2x_s - D_2t_s)\lambda_2 = 0 \quad (5.6-9b)$$

При нулевом значении λ_1 и λ_2 определитель матрицы коэффициентов должен быть равен нулю; следовательно

$$(A_1C_2 - A_2C_1)\sigma^2 + (A_2D_1 - D_2A_1 + C_1B_2 - C_2B_1)\sigma + (B_1D_2 - D_1B_2) = 0 \quad (5.6-10)$$

где мы заменили характеристическое направление σ из уравнения (5.6-8). Сразу же становится очевидным, что, вообще говоря, существуют два характеристических направления, а не одно, как в аналогичном выражении (уравнение 5.6-4) для задачи о потоке с одной переменной. Являются ли эти направления реальными для всех значений (x, t) , зависит от формы коэффициентов. Для задач о потоке в проницаемых средах σ является реальной, по крайней мере, в некоторых частях, а обычно всей области (x, t) . Это фактически является определением гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, корни в уравнении (5.6-10) обычно различны. Обозначим больший корень уравнения (5.6-10) через σ^+ , а меньший корень – через σ^- . Понятно, что соответствующие характеристические кривые C^+ и C^- охватывают область зависимости в (x, t) , т.к. угол наклона C^+ везде больше, чем угол наклона C^- . Эти кривые показаны на Рис.5-20. Затененная область зависимости ограничена в случае двух зависимых переменных быстрой характеристикой σ^+ через В и медленной характеристикой σ^- через А.

Каждая точка в области зависимости находится на пересечении характеристики σ^+ и σ^- . В таком случае можно определить место координат точки в виде расстояния s вдоль конкретной характеристики, имеющей метку α ; то есть, $x = x(s, \alpha)$ и $t = t(s, \alpha)$. В качестве альтернативы, местоположение координат можно определить, дав ему метки обеих характеристик, проходящих через него, иначе, $x = x(\alpha, \beta)$ и $t = t(\alpha, \beta)$, где β теперь обозначение другой характеристики. Понятие меток в какой-то степени сбивает с толку, т.к. α и β могут принимать те же численные значения на исходной кривой; однако, во внутренней части области влияния они различны.

Характеристические кривые не могут быть получены вообще до тех пор, пока не известно каким образом u и v изменяются вдоль характеристических направлений. Это можно получить, заменив коэффициенты u_x и v_x в уравнении (5.6-7) числителями в уравнении (5.6-8):

$$(A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2)u_s + (C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2)v_s + (E_1\lambda_1 + E_2\lambda_2)t_s = 0 \quad (5.6-11a)$$

где мы произвели преобразование при $u_s = u_x x_s + u_t t_s$ и т.д. Аналогичная процедура по u_t и v_t дает:

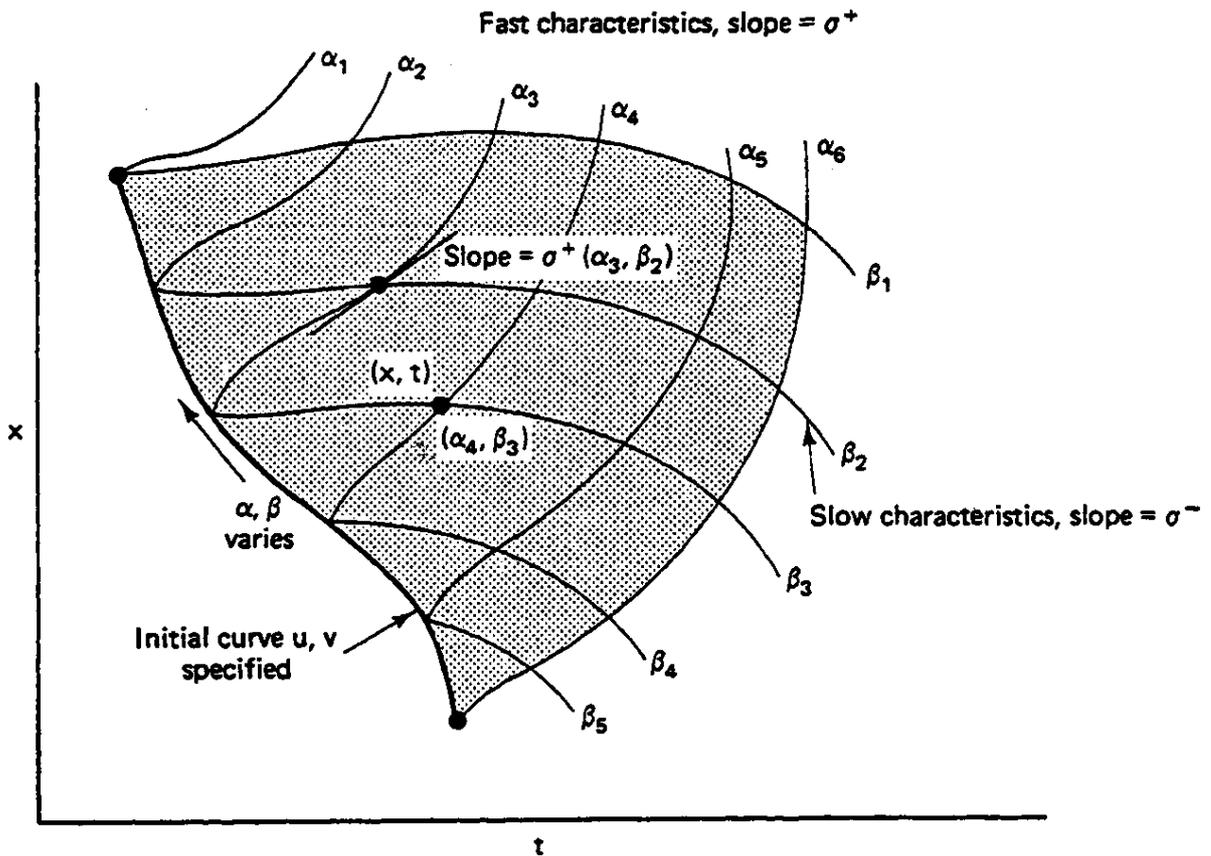
$$(B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2)u_s + (D_1\lambda_1 + D_2\lambda_2)v_s + (E_1\lambda_1 + E_2\lambda_2)x_s = 0 \quad (5.6-11b)$$

Эти уравнения в преобразованном виде представляют собой

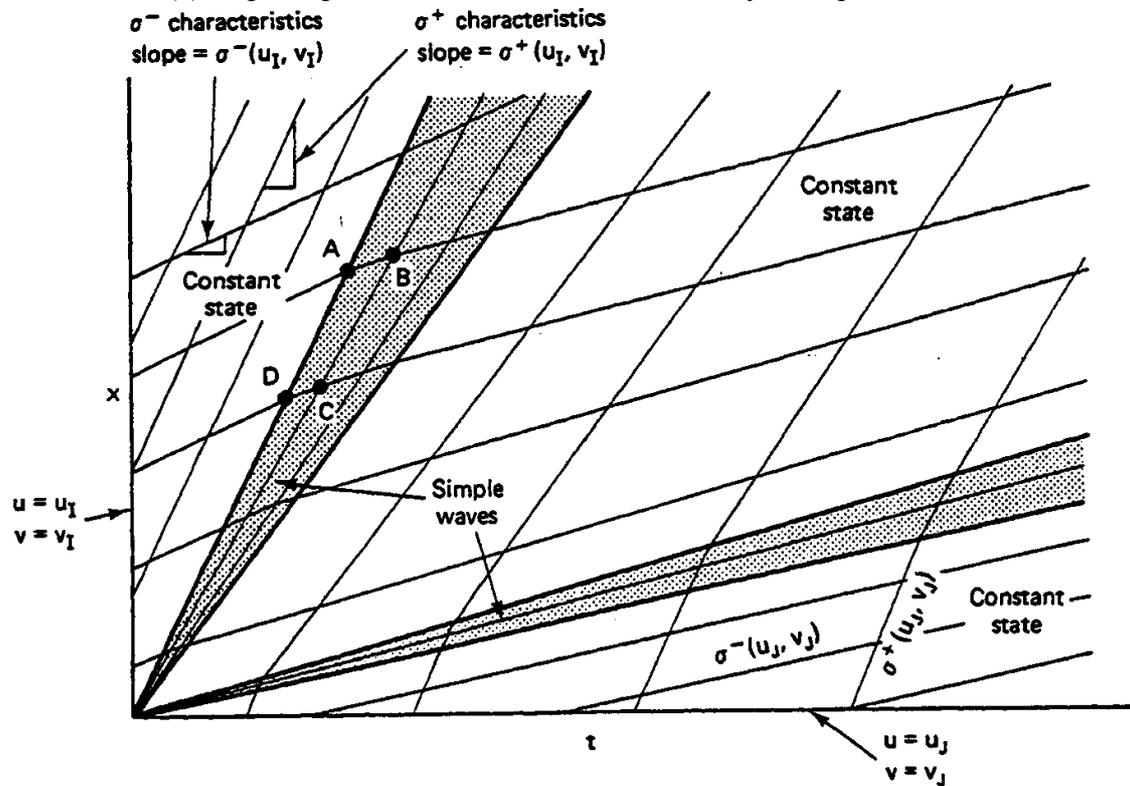
$$(A_1u_s + C_1v_s + E_1x_s)\lambda_1 + (A_2u_s + C_2v_s + E_2t_s)\lambda_2 = 0 \quad (5.6-12a)$$

$$(B_1u_s + D_1v_s + E_1x_s)\lambda_1 + (B_2u_s + D_2v_s + E_2t_s)\lambda_2 = 0 \quad (5.6-12b)$$

Опять при нетривиальных λ_1 и λ_2 определитель матрицы коэффициентов должен быть равен нулю, и опять характеристическое уравнение имеет два реальных различных корня при u_s или v_s .



(a) Характеристики для общей задачи с двумя переменными



(b) Characteristics for two-variable centered simple wave

(b) Характеристики для централизованной простой волны с двумя переменными

Рис.5-20 Области зависимости для гиперболических уравнений с двумя переменными

Корни к этим двум уравнениям образуют, наряду с двумя корнями к уравнению (5.6-10), четыре обыкновенных дифференциальных уравнения, которые могут быть одновременно интегрированы для u , v , x и t , полученных из исходной кривой.

Вместо того, чтобы продолжать детально излагать этот вопрос, рассмотрим частный случай, где E_1 и $E_2 = 0$, а остальные коэффициенты, являются функциями только u и v . Такие уравнения считаются *приводимыми*. Характеристические направления из уравнения (5.6-10) являются известной функцией только u и v . Кроме того, вдоль каждой характеристической кривой имеется зависимость между u и v , которая дается как:

$$(B_2A_1 - B_1A_2) \frac{du}{dv} = (B_1C_2 - C_1B_2) + \sigma = (C_1A_2 - A_1C_2) \quad (5.6-13)$$

исходя из детерминанта вырожденной матрицы, образованной уравнениями (5.6-9a) и (5.6-12a). Имеется три эквивалентных вида этого уравнения, но важным моментом является то, u и v связаны друг с другом вдоль кривых C^\pm в пространстве $x-t$, т.к. все коэффициенты в уравнении (5.6-13) являются известными функциями u и v . График зависимости $u-v$, который содержит вышеупомянутое решение, считается отображением или годографом, пространство и функция $u = u(v)$ при C^+ является отображаемой кривой Γ^+ или C^+ , так же как и $u = u(v)$ при Γ^- является отображаемой кривой для C^- . В этом контексте мы называем пространство $u - v$ *диаграммой траектории композиции*, а кривые Γ^+ и Γ^- - *траекториями композиций*.

Кроме ограничения для приводимых дифференциальных уравнений в частных производных, рассмотрим частный случай $u = u_1$ и $v = v_1$, определяемые на оси x , и $u = u_1$ и $v = v_1$, определяемые на оси t . Как и раньше, это означает, что все значения (u, v) между $(u, v)_I$ и $(u, v)_J$ существуют в начале координат. Кроме того, как и раньше, существуют области постоянного состояния, смежные с обеими осями, в которых характеристические направления, а следовательно, и обозначения α и β являются постоянными. Но в отличие от того, что мы наблюдали раньше, теперь существует две веерообразные области (Рис.5-20b), где сначала быстрые или α - характеристики изменяют угол наклона, а затем меняются β - характеристики. Области не могут перекрываться, иначе существовали бы конечные области, где $\sigma^+ < \sigma^-$. Этот факт вызывает образование новой области постоянного состояния (u, v) между веерами, которая, в общем, отличается как от $(u, v)_I$, так и от $(u, v)_J$. В веерообразных областях характеристики α и β не могут быть обе прямыми, иначе они были бы областями постоянного состояния. Но одно из характеристических направлений должно быть прямым в каждой области (σ^+ в первой затененной области на Рис.5-20(b), а σ^- - во второй). Это происходит потому, что две точки A и D на границе имеют одни и те же значения (u, v) , т.к. они могут считаться находящимися в области постоянного состояния. Это должно быть верно для всех других лучей в веерообразной области, например, для луча, проходящего через C и B. В противном случае луч был бы изогнутым (из уравнения 5.6-10) и в конце концов пересек бы одну из областей постоянного состояния. Тогда, отсюда следует, что все точки на прямолинейной характеристике несут одну и ту же величину (u, v) . Т.к. $(u, v)_A = (u, v)_D$ и $(u, v)_B = (u, v)_C$, из этого следует, что $\sigma_B^- = \sigma_C^-$, а угол наклона характеристик σ^- тот же самый, что и на всех характеристиках σ^+ . Это означает, что зависимость $u = u(v)$, определяемая уравнением (5.6-13), одна и та же на любой медленной характеристике в этой области. Таким образом, $(du/dv)_{\sigma^-}$ и $(du/dv)_{\sigma^+}$ однозначно определяют изменения в u и v в соответствующих веерообразных областях. Функция $u = u(v)$ всегда рассчитывается исходя из криволинейной характеристики.

Вышеупомянутые концепции применяются, в основном, к приводимому множеству дифференциальных уравнений в частных производных при любом числе переменных, зависящих от N . Изложенные последовательно, наблюдения сводятся к следующему:

1. К любой области постоянного состояния примыкает область, имеющая, по крайней мере, одну прямолинейную характеристику. Второй областью является область *простой волны*.
2. В области простой волны зависимые переменные связаны друг с другом системой обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. При граничных и начальных условиях, которые являются равномерными за исключением ступенчатого изменения в начале координат, вся область (x, t) состоит из перемежающихся областей постоянного состояния и простых волн. Простые волны в этом случае являются *центрированными простыми волнами*.

Когерентность

Информация по приводимым уравнениям может быть переформулирована с более глубоким физическим смыслом, если рассмотреть простые волны, исходя из терминологии *когерентных волн* (Хелфферих и Клайн, 1970). Так как (u, v) постоянна на прямолинейной характеристике в области простых или когерентных волн, и, так как σ является функцией только u и v , то из этого следует, что:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_u = \left. \frac{dx}{dt} \right|_v \quad (5.6-14a)$$

или при зависимых переменных u_1, \dots, u_N

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{u_1} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{u_2} \dots \left. \frac{dx}{dt} \right|_{u_N} \quad (5.6-14b)$$

Уравнение (5.6-14b) утверждает, что скорость постоянных величин, зависимых переменных одинакова – условие когерентности. Как мы показываем в Разделе 5-7, метод когерентности расчета простых волн является более прямым, чем использование ??? (МОС). Кроме того, уравнение (5.6-14b) свидетельствует о том, что количество волн не может быть больше N .

5-7 Применение для трехфазного потока

В этом разделе мы применяем результаты теории когерентности, рассчитывая коэффициенты вытеснения для задачи о трехфазном потоке воды ($i = 1$), нефти ($i = 2$), газа ($i = 3$). Мы отбрасываем диссипативные эффекты (капиллярное давление и свойства жидкости, зависящие от давления) и рассматриваем жидкости как единые псевдокомпонентные фазы. Допущение несжимаемой газовой фазы реально, конечно, только если

$$c_3 \Delta P \cong \frac{\Delta P}{P} \quad (5.7-1)$$

невелико. Это условие в общем не удовлетворяется, хотя при течениях в высокопроницаемых средах $c_3 \Delta P$ может быть довольно небольшой величиной, особенно с учетом того, что вязкость газа тоже невелика.

Но даже, если $c_3 \Delta P$ большая величина, мы видим из Раздела 5-3, что сжимаемость жидкости заставляет волны распространяться и не влияет на скорость волн.

С учетом вышеупомянутых ограничений уравнение сохранения веществ (5.4-1) становится

$$\frac{\partial S_j}{\partial t_D} + \frac{\partial f_j}{\partial x_D} = 0, \quad j=1 \text{ или } 2 \quad (5.7-2)$$

в безразмерном виде, где для горизонтального пласта

$$f_i = \frac{\lambda_{ri}}{\sum_{m=1}^3 \lambda_{rm}} \quad (5.7-3)$$

Относительные подвижности в уравнении (5.7-3) являются известными функциями S_1 и S_2 . В этом примере имеются только две независимые насыщенности, т.к. $S_1 + S_2 + S_3 = 1$, которые мы произвольно приняли за насыщенности воды и нефти. Уравнение (5.7-3) подразумевает, что движения отдельных фаз в многофазовом потоке являются известными функциями S_1 и S_2 .

Из уравнения (5.4-5) удельная скорость постоянной насыщенности S_j равна

$$v_{S_j} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial S_j} \right)_{t_D}, \quad j=1 \text{ или } 2 \quad (5.7-4a)$$

если волна не заостряющаяся и

$$v_{\Delta S_j} = \frac{\Delta f_j}{\Delta S_j}, \quad j=1 \text{ или } 2 \quad (5.7-4b)$$

если волна представляет собой импульс. Мы не можем определить производную в уравнении (5.7-4a), не зная решения для задачи $S_j(x_D, t_D)$. Результаты предыдущего раздела распространяются на эту задачу при $A_1 = 1, B_1 = f_{11}, D_1 = f_{12}, B_2 = f_{21}, C_2 = 1, D_2 = f_{22}, A_2 = C_1 = 0, E_1 = E_2 = 0$. Для краткости мы условились, что $f_{12} = (\partial f_1 / \partial S_2)_{S_1}$ и т.д. B_1, B_2, C_1 и C_2 – это известные функции S_1 и S_2 , хотя, вероятно, очень сложные, но мы можем рассчитать их, не зная решения $S_1(x_D, t_D)$ и $S_2(x_D, t_D)$.

Пусть теперь начальные насыщенности в среде будут равномерными при $(S_1, S_2)_i$, и наложим при $x_D = 0$ насыщенности $(S_1, S_2)_j$. Из Раздела 5-6 мы знаем, что условие когерентности применимо во всех точках в области, где

$$\frac{df_1}{dS_1} = \frac{df_2}{dS_2} = \sigma \quad (5.7-5)$$

из уравнений (5.6-14b) и (5.7-4a). Производные в уравнении (5.7-5) являются полными производными, т.к. условие когерентности подразумевает существование зависимости $S_2 = S_2(S_1)$ в пространстве насыщения. Мы раскроем скобки в производных в уравнении (5.7-5) и запишем два уравнения в матричной форме как:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (5.7-6)$$

Чтобы определить $S_2(S_1)$, мы сначала решим это уравнение для характеристических чисел, σ^\pm

$$\sigma^\pm = \frac{1}{2} \left\{ (f_{22} + f_{11}) \pm [(f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{21}f_{12}]^{1/2} \right\} \quad (5.7-7)$$

Оба корня для уравнения (5.7-7) являются реальными, $\sigma^+ > \sigma^-$, и оба являются известными функциями S_1 и S_2 . Вспомним, что σ^\pm являются скоростями насыщения. Определение dS_1 и dS_2 в уравнении (5.7-6) дает

$$\frac{dS_2}{dS_1} = \frac{\sigma^\pm - f_{11}}{f_{12}} \quad (5.7-8)$$

Уравнения (5.7-7) и (5.7-8) являются частными случаями уравнений (5.6-10) и (5.6-13). Уравнение (5.7-8) является обыкновенным дифференциальным уравнением, интегрирование которого дает функцию $S_2(S_1)$. Существуют две такие функции, соответствующие σ^+ и σ^- . Скорость любого насыщения вдоль $S_2(S_1)$ дается σ^+ и σ^- в зависимости от того, какая является физически реальной.

Вышеприведенную процедуру, вероятно, можно было бы сделать более понятной, адресуясь к частной задаче. Рассмотрим смесь нефти – газа – воды, вытесняемую водой. Чтобы упростить задачу, принимаем относительные проницаемости равными

$$k_{rj} = \frac{S_j - S_{jr}}{1 - S_{1r} - S_{2r} - S_{3r}} \quad (5.7-9)$$

и пусть $S_{1r} = S_{2r} = S_{3r} = 0.1$. Уравнение (5.7-9) не является реальной функцией относительной проницаемости трех фаз (см. Пример 5N), но его достаточно для иллюстрации. Далее, мы принимаем $\mu_1 = 1$ мПа-сек, $\mu_2 = 5$ мПа-сек и $\mu_3 = 0.01$ мПа-сек, при начальных условиях $S_{21} = 0.45$ и $S_{11} = 0.1$. Следовательно, среда изначально находится в условиях остаточной водонасыщенности при равных объемах нефти и газа. Мы должны вытеснить эту смесь водой, т.е. $S_{11} = 0.8$ и $S_{21} = 0.1$. Этот метод соответствует заводнению, начатому четко на стадии первичной добычи.

На Рис. 5-21 показаны функции $S_2(S_1)$, полученные численным интегрированием уравнения (5.7-8) с указанными физическими зависимостями. График находится на треугольной диаграмме, подчеркивая зависимость $S_1 = S_2 = S_3 = 1$. Интегрирование уравнения (5.7-8) при различных начальных значениях S_1 и S_2 дает два семейства кривых, соответствующих σ^+ и σ^- , которые являются отражаемыми кривыми σ^+ и σ^- (тонкие линии на Рис.5-21), указанными ранее. Т.к. $\sigma^+ > \sigma^-$, отражаемые кривые нигде не совпадают, и, кроме того, до каждой точки на диаграмме насыщения существуют две ассоциированные скорости σ^+ и σ^- . Два семейства кривых мы называем *траекториями* насыщения после Хелффериха (1981). Конкретные траектории, которые проходят от начального условия до закачки, представляют собой *направления* насыщения (жирные линии на Рис.5-21). Хотя впредь мы ограничим наше внимание направлениями насыщения, Рис.5-21 дает быструю наглядную перспективу для любого процесса вытеснения, имеющего произвольные начальные условия и условия закачки.

При перемещении от начальных условий к условиям закачки существует два альтернативных направления насыщения: (1) - участок σ^- , идущий от начальных условий к верхней вершине области трехфазного потока, и затем участок σ^+ на границе газовой и водной фаз до условия закачки, и (2) - участок σ^+ от начальных условий до $(S_1, S_2) = (0.36, 0.54)$, за которым следует участок σ^- вдоль границы нефтяной и водной фаз до условий закачки.

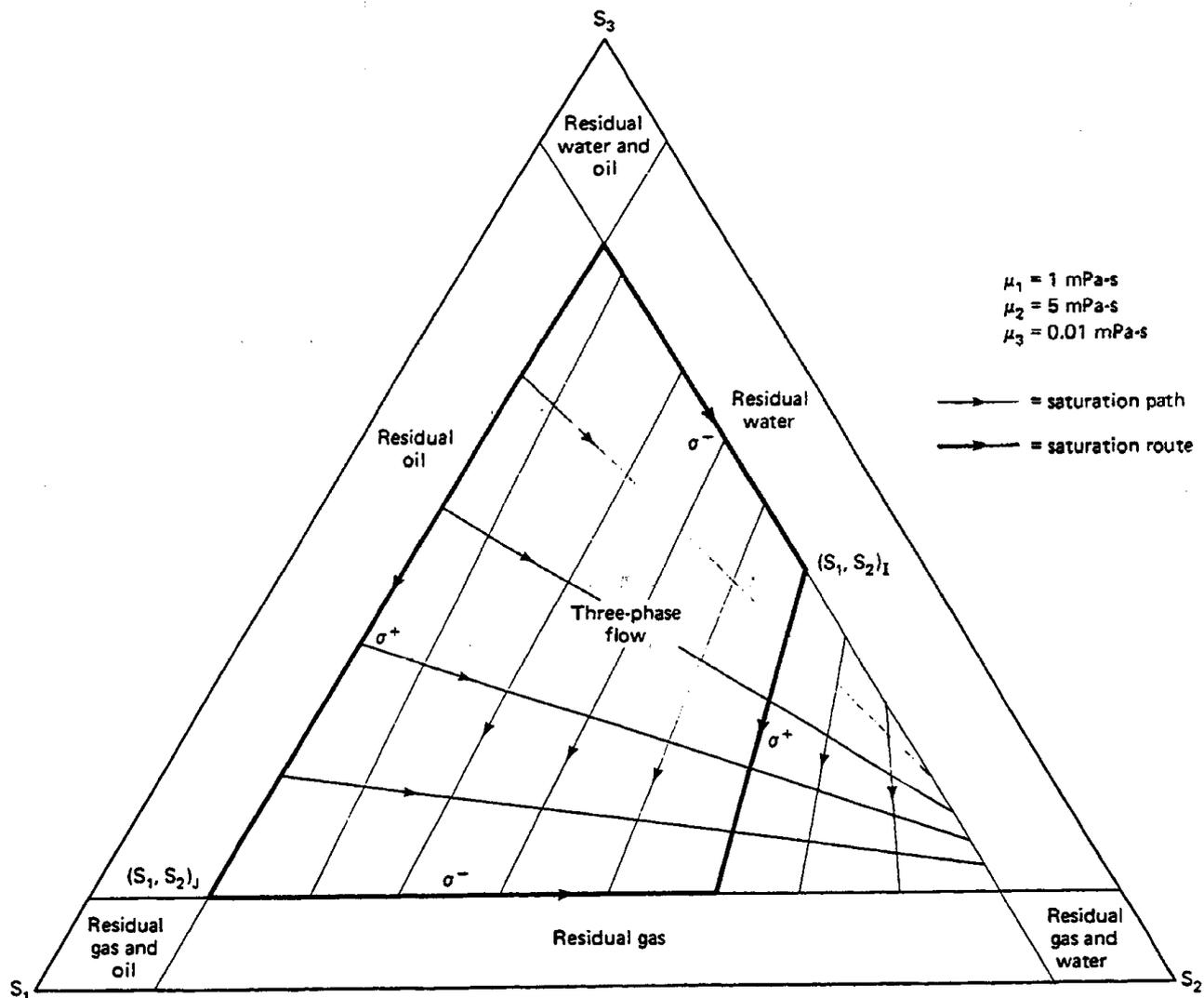
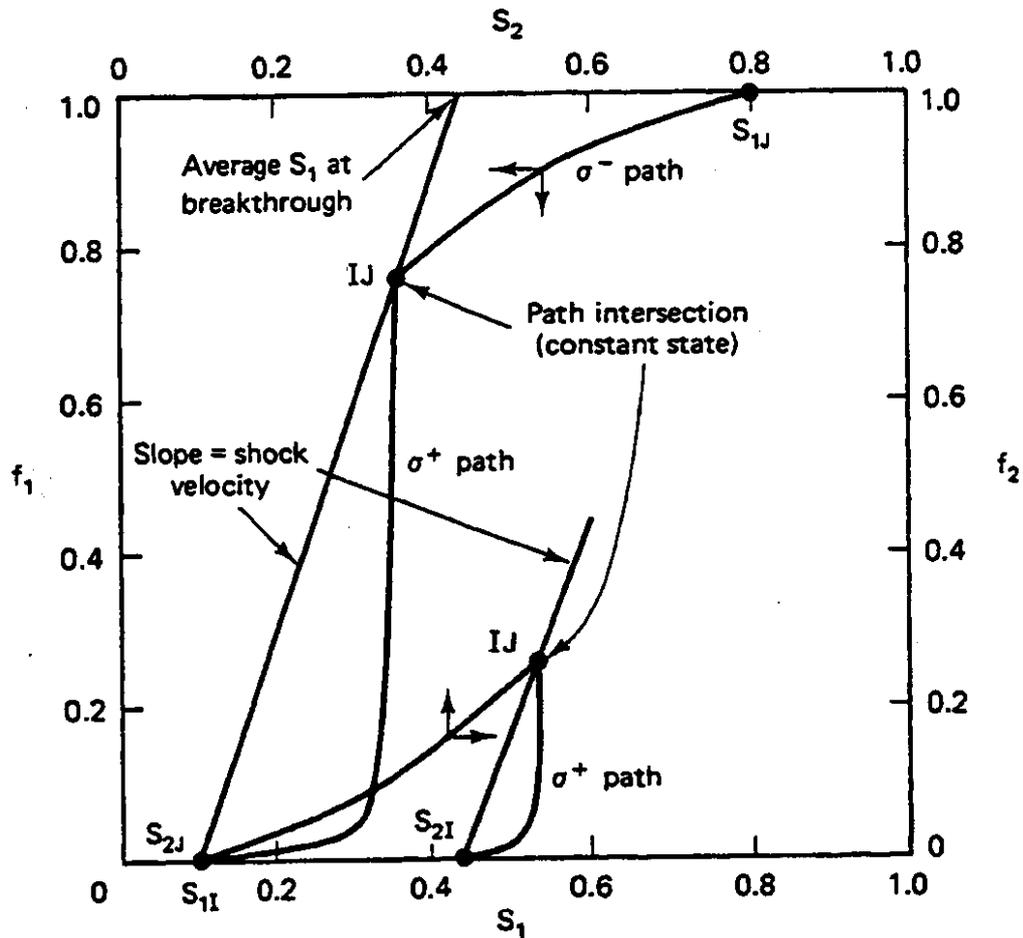


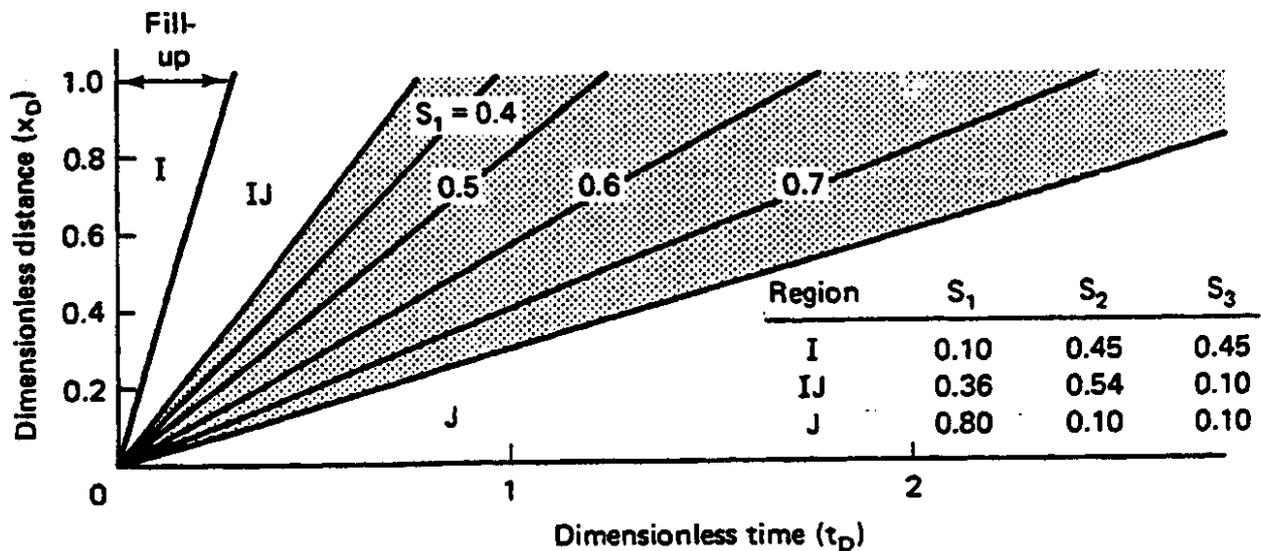
Рис.5-21 Траектории насыщения трехфазного потока

Оба направления являются математически обоснованными решениями для этой задачи; фактически, бесконечное число математических решений соответствует направлению, которое произвольно переключается с траектории σ^+ на траекторию σ^- , переходя от $(S_1, S_2)_I$ к $(S_1, S_2)_I$. Из задачи Баклея – Леверетта, приведенной в разделе (5-2), мы знаем, что скорости насыщения должны убывать монотонно (хотя не непрерывно) вверх по потоку. Единственным физическим решением для этой задачи является направление (2), т.к. условие $\sigma^+ > \sigma^-$ делает это направление единственным, где σ убывает монотонно от $(S_1, S_2)_I$ до $(S_1, S_2)_I$.

В пределах участка любого направления скорости насыщения должны так же убывать монотонно вверх по потоку. Это условие не удовлетворяется на участке направления σ^+ (стрелки направления насыщения указывают направление возрастания скорости насыщения). Такое поведение указывает на то, что волна является импульсом, и мы можем определить скорость импульса методом, полностью аналогичным тому, что был описан в Разделе (5-2). На Рис.5-22(а) представлены графики зависимости потоков нефти и воды (f_1, f_2) от (S_1, S_2) вдоль пути прохождения состава. Построение импульса точно такое, как показано на Рис.5-4, и может



(a) Диаграмма потока – насыщения



(b) Диаграмма времени – расстояния

Рис.5-22 Диаграммы для примера трехфазного потока

быть осуществлено или на кривой $f_1 - S_1$ или на кривой $f_2 - S_2$. Уравнение (5.7-5) гарантирует это равенство. Единственной реальной разницей между задачами для двухфазного и трехфазного потока в этой точке является существование области постоянного состояния при II. Диаграмма времени – расстояния для вытеснения представлена на Рис.5-22(b), который нужно сравнить с Рис.5-5 и 5-20(b).

Несмотря на упрощенный характер кривых относительных проницаемостей, используемых в этом примере, Рис.5-22 показывает, что наиболее важной особенностью трехфазного потока нефти – газа – воды является чрезвычайно низкая вязкость газа. Эта вязкость является причиной того, что движение нефтяной фазы первоначально невелико, и появление заметного количества нефти на выходном конце задерживается до тех пор, пока t_D не будет равно 0.28. Это время задержки или «заполнения» - особенность, присущая всем заводнениям, начатым при наличии в среде существенного количества свободного газа (Кодл, 1968). Период «заполнения» возникает из-за очень большой подвижности газа, а не в результате сжимаемости или повторного растворения газа. Два последних эффекта сопутствовали бы снижению времени «заполнения». Вторым следствием небольшой вязкости газа является то, что в среде не происходит одновременного движения трех фаз. Фактически, полагая, что смесь нефти и воды образует вал свободного газа, можно повторить результаты, показанные на Рис.5-21 и 5-22 с гораздо меньшим усилием (см. Пример 50). Заключительный вывод, сделанный исходя из условия небольшой вязкости газа, заключается в том, что это поведение качественно верно независимо от использованных функций относительной проницаемости.

Мы завершаем этот раздел рассмотрением коэффициента вытеснения в условиях трехфазного потока. Теперь имеется коэффициент вытеснения как для нефти, так и для газа, для определения которого нам нужно знать средние насыщенности (уравнение 5.1-2). Учитывая кривую изменения доли фазы в многофазовом потоке от насыщенности, представленную на Рис.5-22, средние насыщенности следуют из методики, аналогичной методике Уэллджа, приведенной в Разделе 5-2.

$$\bar{S}_j = S_j \Big|_{x_D=1} - t_D (f_j \Big|_{x_D=1} - f_{jD}) , \quad j=1, 2 \text{ или } 3 \quad (5.7-10)$$

где $t_D = (df_j / dS_j)^{-1}$ - величина, обратная углу наклона кривой $f_j - S_j$, определяемая при $x_D=1$. На Рис.5-22(a) показана средняя водонасыщенность в момент прорыва воды, а на Рис.5-23 показаны коэффициенты вытеснения для этого примера. Вновь E_D ограничена остаточными фазовыми насыщенностями, добыча нефти задерживается на период «заполнения», а коэффициент вытеснения нефти определяется относительными проницаемостями и вязкостями воды – нефти.

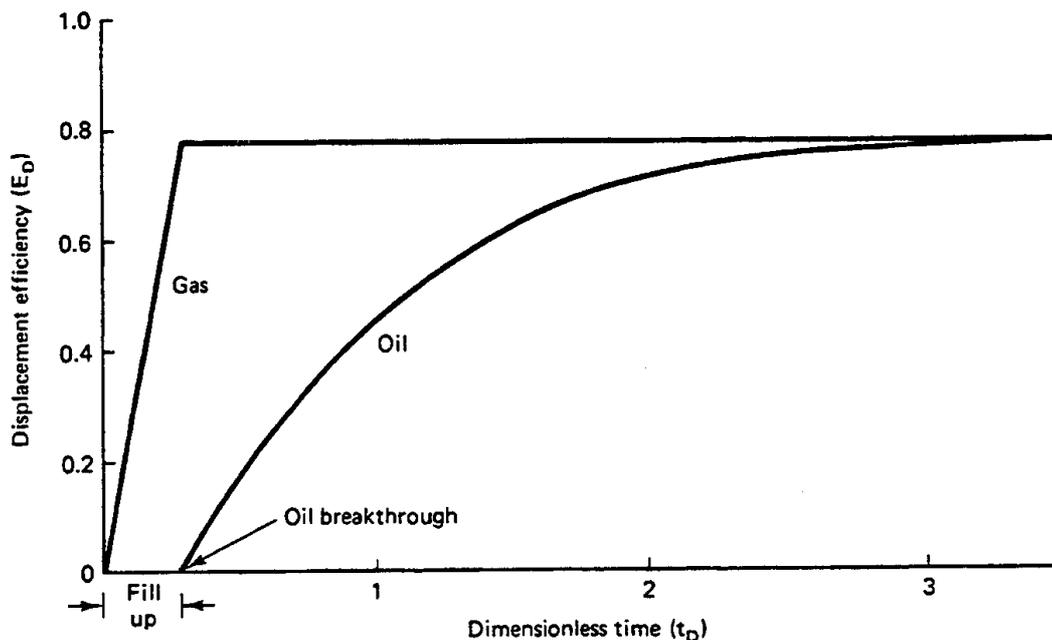


Рис.5-23 Коэффициенты вытеснения для задачи о трехфазном потоке

Этот пример демонстрирует сильные стороны теории простых волн. В последующих главах мы вернемся к этим методикам применительно к конкретным процессам повышения нефтеотдачи.

5-8 Заключительные замечания

Любой расчет нефтеотдачи в масштабах промысла, основанный только на методиках, рассмотренных в этой главе, приведет к серьезной завышенной оценке фактической нефтеотдачи: Такие одномерные расчеты не учитывают проблемы объемного охвата, которые, по меньшей мере, так же важны, как и коэффициент вытеснения. Тем не менее, расчеты движения отдельных фаз в многофазовом потоке имеют большое значение для создания основы для продвижения нашего исследования. Вопросами, имеющими большое значение для создания этой основы, являются теория Баклея – Леверетта и ее обобщение, приведенное в Разделе 5-7, идеи когерентных волн и их отображения, и понятие об идеальном смешивающемся вытеснении.

ПРИМЕРЫ

5А. Беспараметрическая формулировка. Покажите, что уравнения (5.2-5) могут быть приведены к беспараметрической формулировке путем определения и введения приведенной насыщенности S_D , где

$$S_D = \frac{S_1 - S_{1f}}{S_{1f} - S_{1i}} \quad (5A-1)$$

5В. Радиальная форма водного материального баланса

(а) Покажите, что одномерное уравнение сохранения воды (5.2-1) при несжимаемом потоке в радиальной геометрии представляет собой:

$$\phi \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot H_t \cdot r} \left(\frac{\partial f_1}{\partial r} \right) = 0 \quad (5B-1)$$

где q – это объемная скорость потока, H_t – средняя толщина, а f_1 – такое же как в уравнении (5.2-2).

(б) Если мы примем $r_D = (r/R)$ и $t_D = \int_0^t q dt / \pi \phi H_t R^2 = \int_0^t q dt / V_p$, покажите, что уравнение (5B-1) становится идентичным линейному уравнению (5.2-5а).

5С. Применение теории Баклея-Леверетта. Рассчитайте изменение потока (доля воды $f_1|_{x_D=1}$ в зависимости от t_D) для воды ($\mu_1 = 1$ мПа-сек), вытесняющей нефть по следующим заданным экспериментальным данным (Чанг и др., 1978):

S_1	k_{r1}	k_{r2}
0.40	0.00	0.36
0.45	0.005	0.26
0.50	0.009	0.14
0.55	0.02	0.08
0.60	0.035	0.036
0.65	0.050	0.020
0.70	0.080	0.00

Используйте три значения вязкости нефти: $\mu_2 = 1, 5$ и 50 мПа-сек. При $\mu_2 = 5$ мПа-сек рассчитайте конечную точку, импульс и отношение подвижностей при средней насыщенности. Угол падения равен 0 .

5D. Теория гравитационного потока и изменения доли фазы в многофазовом потоке. Для экспоненциальных функций относительных проницаемостей уравнения (3.3-4) постройте график зависимости профилей водонасыщенности при $t_D = 0.3$, при углах падения $\alpha = 0^\circ, 30^\circ$ и -30° . Дополнительные данные следующие: $S_{1r} = S_{2r} = 0.2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $k_{r1}^0 = 0.1$, $k_{r2}^0 = 0.8$, $\mu_1 = 1$ мПа-сек, $\mu_2 = 10$ мПа-сек, $k = 0.5 \mu\text{м}^2$, $\Delta\rho = 0.2 \text{ г/см}^3$ и $u = 0.6 \text{ см/сут}$.

5E. Теория Баклея – Леверетта с прямолинейными относительными проницаемостями. Используйте прямолинейные экспоненциальные функции относительных проницаемостей с нулевыми остаточными фазовыми насыщенностями в нижеследующем ($n_1 = n_2 = 1$, $S_{1r} = S_{2r} = 0$ в экспоненциальных функциях относительных проницаемостей). Кроме того, примите $f_{1r} = 0$ и $f_{1v} = 1$.

(a) Покажите, что знак $(1 - M^0 + M^0 N_g^0 \sin \alpha)$ однозначно определяет характер (распространяющаяся, нейтральная, заостряющаяся) волны водонасыщения.

(b) Для случая распространяющейся волны - $(1 - M^0 + M^0 N_g^0 \sin \alpha) < 0$ – Уравнение (5.2-10) может быть явно преобразовано при $S_1(x_D, t_D)$. Выведите это выражение в виде формулы для корней квадратного уравнения.

(c) Используйте уравнение в части (b) чтобы показать, что при $\alpha = 0$ функция водонасыщенности дается как:

$$S_1(x_D, t_D) = \begin{cases} 0, & \frac{x_D}{t_D} > M^0 \\ \left(\frac{\left(\frac{t_D \cdot M^0}{x_D} \right)^{1/2} - 1}{M^0 - 1} \right), & \frac{1}{M^0} \leq \frac{x_D}{t_D} \leq M^0 \\ 1, & \frac{x_D}{t_D} < \frac{1}{M^0} \end{cases} \quad (5E-1)$$

(d) Используйте уравнение (5E-1), чтобы вывести выражение средней водонасыщенности $\bar{S}(t_D)$ и коэффициента вытеснения $E_D(t_D)$.

5F. Движение водной фазы при капиллярном давлении. Выведите выражение для движения водной фазы, включая капиллярное давление (уравнение 5.3-1).

5G. Аналитические отношения относительных проницаемостей (Ershaghi и Omoregie, 1978). В диапазонах средних водонасыщенностей отношение относительных проницаемостей нефти – воды дают почти прямолинейный график в логарифмическом масштабе при использовании

$$\frac{k_{r2}}{k_{r1}} = A \cdot e^{-BS_1} \quad (5G-1)$$

где A и B – положительные постоянные. Используя теорию Баклея – Леверетта, покажите, что график произведения долей нефти и воды представляет собой прямую линию с углом наклона $1/B$, если он построен в зависимости от $1/t_D$. Угол падения равен 0 .

5H. Движение отдельных фаз с двумя перегибами. Для кривой изменения доли фазы в многофазовом потоке на Рис.5H построить графики зависимости движения фаз от безразмерного расстояния на момент прорыва при насыщенности $S_1 = 1$, вытесняющей $S_1 = 0$, и $S_1 = 0$, вытесняющей $S_1 = 1$.

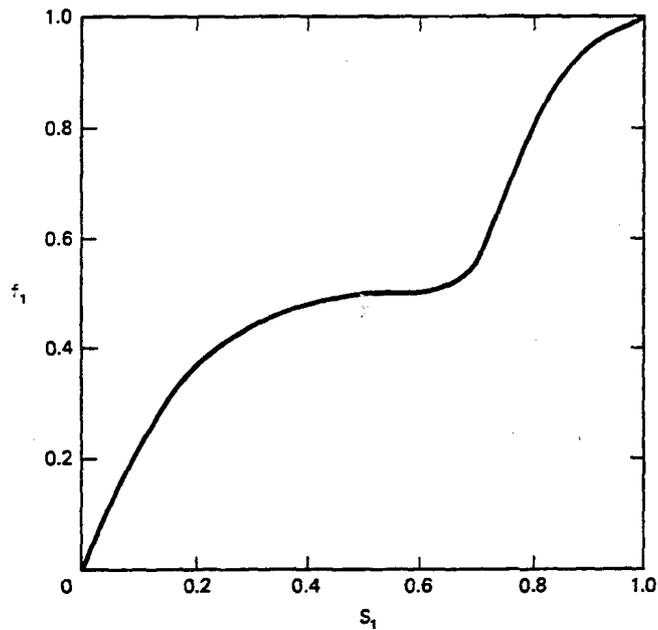


Рис. 5Н Кривая движения отдельных фаз в многофазовом потоке для Примера 5Н

5I. *Обратимость дисперсии и движение отдельных фаз в многофазовом потоке.* Жидкость 2 должна быть частично вытеснена жидкостью 1 в одномерной проницаемой среде. Жидкость 1 закачивается до момента ее добычи, а затем потоку задается обратное направление (т.е. жидкость 2 закачивается с выходного конца). В последующем примите за начальные условия (I) 100% текущей жидкости 2, а за условие закачки (J) – 100% жидкости 1.

(a) Постройте две диаграммы время-расстояние для этого случая, используя кривые изменения доли фазы в многофазовом потоке, наподобие тех, что изображены с правого и левого края Рис. 5-6.

(b) Если жидкости 1 и 2 являются полностью смешивающимися, с идентичными вязкостями и смешиваются только за счет дисперсии, используйте уравнение (5.5-18) для построения диаграммы время-расстояние.

(c) Какой вы можете сделать вывод относительно смешивания, обусловленного движением отдельных фаз в многофазовом потоке, по сравнению со смешиванием, обусловленным дисперсией, исходя из результатов части (a) и (b)?

(d) Если жидкости 1 и 2 являются водой и нефтью, и применяется кривая изменения доли фазы в многофазовом потоке наподобие той, что показана в средней части Рис. 5-6, рассчитайте и постройте диаграмму время-расстояние.

5J. *Отношение подвижностей в условиях сжимаемого потока.* Рассмотрим поршневое вытеснение жидкости 2 жидкостью 1 в направлении x . Используйте общее определение отношения подвижностей (градиент давления впереди фронта, разделенный на градиент давления позади фронта) для нижеследующего:

(a) Покажите, что отношение подвижностей становится отношением подвижностей в конечной точке, если объемная скорость течения uA не является функцией x (жидкости несжимаемые).

(b) С другой стороны, если поток массы ρuA не является функцией x , покажите, что отношение подвижностей принимает вид

$$M_v = \frac{k_{r1}^o \cdot v_2}{k_{r2}^o \cdot v_1} \quad (5J-1)$$

где $v = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость.

(c) Рассчитайте M^0 и M_v для следующих условий: $\rho_1 = 1$ мг/см³, $\mu_1 = 1$ мПа-сек, $\rho_2 = 0.8$ г/см³, $\mu_2 = 2$ мПа-сек, $k_{r1}^o = 0.1$ и $k_{r2}^o = 1.0$.

5К. Применение данных трассера. Рассмотрим одномерную проницаемую среду, содержащую нефть при равномерной остаточной насыщенности S_{2r} , через которую с постоянной скоростью течет 100% воды. При $t = 0$ с входного конца, содержащего два идеальных (недиспергирующих и неабсорбирующих) трассера, вводится второй поток воды. Трассер 1 остается только в водной фазе, а трассер 2 проникает в остаточную нефтяную фазу с коэффициентом распределения, равным 2. Коэффициент распределения – это отношение концентрации трассера 2 в нефтяной фазе к концентрации трассера 2 в водной фазе $K_{21}^2 = C_{22}/C_{21}$. Трассер 1 прорывается через 3 часа, а трассер 2 - через 6 часов. Если объемная скорость закачки равна $1 \text{ см}^3/\text{мин.}$, рассчитайте поровый объем и S_{2r} .

5Л. Лабораторная оценка дисперсности. Дисперсность можно определить в ходе лабораторных вытеснений, смешивающихся при первом контакте, со следующим выводом:

(а) Покажите, используя уравнение (5.5-15), что график зависимости $(1-t_D)/\sqrt{t_D}$ от $\text{erf}^{-1}(1-2C_e)$ даст прямую линию с углом наклона $2N_{pe}^{-1/2}$. Здесь C_e – концентрация потока $(C_D|_{x_D=1})$.

(б) Определите поровый объем, коэффициент дисперсии и дисперсность из экспериментальных данных, приведенных ниже:

Добытый объем (см^3)	Концентрация потока
60	0.010
65	0.015
70	0.037
80	0.066
90	0.300
100	0.502
110	0.685
120	0.820
130	0.906
140	0.988
150	0.997

Промежуточная скорость равна 20 см/сутки, а длина – 0.5 м. Отметьте, что $\text{erf}^{-1}(1-2x)$ является вероятностной осью (ось x) на вероятностной бумаге.

5М. Трассеры в двухфазном потоке. Рассмотрим течение нефти и воды через проницаемую среду при постоянной скорости движения нефтяной фазы (пример А на Рис. 5-12). Покажите, что, если трассер с коэффициентом распределения, определяемым как в Примере 5К при $t_D = 0$, то уравнение сохранения при концентрации трассера C в водной фазе имеет следующий вид (Делшад, 1981):

$$\frac{\partial C}{\partial t_D} + \frac{\partial C}{\partial x_D} - \frac{\bar{K}}{v_T \cdot L} \frac{\partial^2 C}{\partial x_D^2} \quad (5M-1)$$

где

$$t_D = t \cdot \frac{v_t}{L} \quad (5M-2)$$

$$v_T = \frac{q}{A \cdot \phi} \cdot \frac{f_1 + K_{21} \cdot f_2}{S_1 + K_{21} \cdot S_2} \quad (5M-3)$$

$$\bar{K} = \frac{S_1 \cdot K_{l1} + K_{21} \cdot S_2 \cdot K_{l2}}{S_1 + K_{21} \cdot S_2} \quad (5M-4)$$

K_{l1} и K_{l2} – это коэффициенты продольной дисперсии для трассера в нефтяной и водной фазах. Примите $(q / A\phi)$ за постоянную величину.

5N. Расчет трехфазной когерентности. Более реалистической трехфазной относительной проницаемостью для нефти, газа и воды является:

$$k_{r1} = k_{r1}^o \cdot \left(\frac{S_1 - S_{1r}}{1 - S_{1r} - S_{2r1}} \right)^{n_1} \quad (5N-1)$$

$$k_{r3} = k_{r3}^o \cdot \left(\frac{1 - S_1 - S_2 - S_{3r}}{1 - S_{1r} - S_{3r}} \right)^{n_3} \quad (5N-2)$$

$$k_{r2} = k_{r2}^o \cdot \left\{ \left(\frac{k_{r21}}{k_{r2}^o} + k_{r1} \right) \cdot \left(\frac{k_{r23}}{k_{r2}^o} + k_{r3} \right) - (k_{r1} + k_{r3}) \right\} \quad (5N-3)$$

где

$$k_{r21} = k_{r2}^o \cdot \left(\frac{1 - S_1 - S_{2r1}}{1 - S_{2r1} - S_{1r}} \right)^{n_{21}} \quad (5N-4)$$

$$k_{r23} = k_{r2}^o \cdot \left(\frac{S_2 + S_1 - (S_{2r3} + S_{1r})}{1 - (S_{2r3} + S_{1r}) - S_{3r}} \right)^{n_{23}} \quad (5N-5)$$

Это модификации модели относительной проницаемости Стоуна (1970). В уравнениях (5N-1) - (5N-5):

n_{21} = Показатель степени относительной проницаемости по нефти в системе вода – нефть.

n_{23} = Показатель степени относительной проницаемости по нефти в системе газ – нефть.

S_{2r1} = Остаточная нефтенасыщенность в системе вода - нефть.

S_{2r3} = Остаточная нефтенасыщенность в системе газ - нефть.

Рассчитайте и представьте графически следующее:

(а) Графики константы k_{r1} , k_{r2} , k_{r3} в треугольном композиционном пространстве, S_1 , S_2 , S_3 .

(б) Траектории составов и направления составов, применяемых в заводнении, при начальных насыщенных, равных 0.5, 0.3 и 0.2 для нефти, газа и воды.

(с) Положения волн на диаграмме безразмерного времени – расстояния.

Используйте следующие данные:

$\mu_1 = 1$ мПа-сек.	$\mu_2 = 2$ мПа-сек.	$\mu_3 = 0.01$ мПа-сек.
$S_{2r1} = 0.3$	$k_{r2}^o = 0.6$	$n_{21} = 1.5$
$S_{2r3} = 0.05$	$k_{r1}^o = 0.3$	$n_{23} = 2$
$S_{1r} = 0.2$	$k_{r3}^o = 0.7$	$n_1 = 3$
$S_{3r} = 0.05$	$\alpha = 0$	$n_3 = 2.5$

Эта задача требует численного решения.

5O. Упрощенное движение трехфазного потока. Переделайте часть (с) Примера 5N, предположив, что вытеснение становится импульсной волной от начальных условий до области

одновременного двухфазного потока нефти – воды, за которым следует волна неопределенного характера до условий закачки. Скорость первой волны дается как:

$$v_{\Delta S_1} = \frac{f_{3l}}{S_{3l} - S_{3r}} = \frac{f_{1l} - f_1^+}{S_{1l} - S_1^+} = \frac{f_{2l} - f_2^+}{S_{2l} - S_2^+} \quad (50-1)$$

где f_1^+ и S_1^+ - это движение водной фазы и насыщенность позади импульса. Скорость второй волны дается построением зависимости Баклея – Леверетта. Изобразите графически изменение потока нефти и воды, чтобы продемонстрировать явление «заполнения».

5P. Метод характеристик для приводимых уравнений. Рассмотрим следующую пару дифференциальных уравнений в частных производных для $u(x, t)$ и $v(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 v)}{\partial x} = 0 \quad (5P-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial x} = 0 \quad (5P-2)$$

где обе величины u и v меньше или равны 1.

- Запишите эти уравнения в «каноническом» виде уравнений (5.6-6). Являются ли они приводимыми? Почему, если да, и почему, если нет?
- Запишите требования когерентности для уравнений (5P-1) и (5P-2). Используйте это для формулировки выражения σ (скорость состава вдоль характеристических направлений).
- Используйте σ для того, чтобы сформулировать выражение для условия $u = u(v)$ вдоль обоих характеристических направлений.
- Если граничные условия определены вдоль линии $u = 1$, представьте графически сетку траекторий «состава» (пространство u, v) при $u < 1$ и $v < 1$.
- На графике части (d) покажите направление «состава» для $(u, v)_I = (0.6, 0.2)$, вытесняющего $(u, v)_J = (1, 1)$. Рассматривайте u и v как физические переменные, так что скорость композиции должна убывать монотонно от I до J. Постройте диаграмму время (t) – расстояние (x) для этого «вытеснения», где $t > 0$, а $1 > x > 0$.
- Исходя из этой задачи и того, что вы знаете об идеальном смешивающемся вытеснении, обсудите, почему построения на Рис. 5-12 могут быть сделаны без этапов (a) – (e).

5Q. Гравитационное разделение и движение отдельных фаз в многофазовом потоке. Рассмотрим однородную, одномерную, проницаемую среду, показанную на Рис. 5Q, для которой применимы все допущения о движении отдельных фаз в многофазовом потоке. Оба конца среды запаяны. При $t < 0$ среда содержит зону, полностью насыщенную водой, над зоной, насыщенной нефтью ($0 < \epsilon < 1$). При $t = 0$ вода, обладающая более высокой плотностью, течет вниз, в то время как менее плотная нефть течет вверх. Это приводит к совершенно обратному размещению нефтяной и водных зон через достаточных промежутков времени. Рис. 5Q также показывает условия среды с течением времени.

- Покажите, что ни в одной точке среды нет массового потока ($u = 0$).
- Выведите уравнение сохранения воды для этого частного случая из общих уравнений, приведенных в Главе 2. Приведите также граничные условия, необходимые для решения этого уравнения для $S_1(x, t)$.
- Сделайте уравнение части (b) безразмерным путем введения соответствующих масштабных коэффициентов.
- Выведите безразмерный поток воды (аналогично движению отдельных фаз) путем исключения градиента давления воды из уравнения части (c). Отсутствие массового потока не исключает градиентов давления (Мартин, 1958).

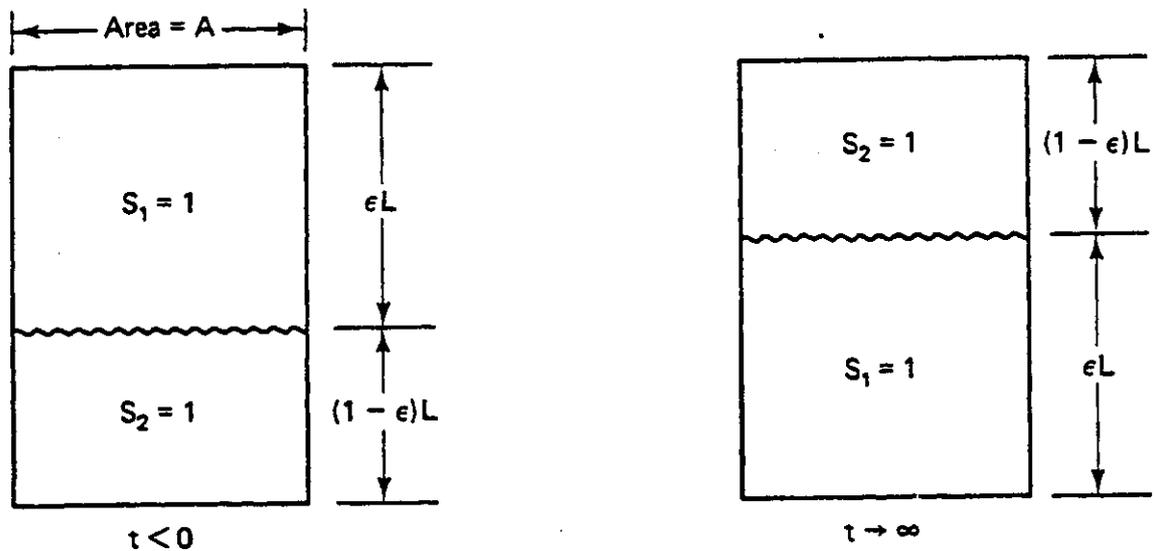


Рис. 5Q Гравитационное разделение при движении отдельных фаз

(е) Постройте график зависимости безразмерного водного потока части (d) от водонасыщенности при следующих значениях

$$\begin{aligned}
 k_{r1} &= 0.1S_1^4 & k_{r2} &= 0.8(1 - S_1)^2 \\
 \mu_1 &= 1 \text{ мПа} - \text{сек.} & \mu_2 &= 5 \text{ мПа} - \text{сек.}
 \end{aligned}$$

(f) Исходя из кривой части (е) и $\epsilon = 0.6$ постройте диаграмму время – расстояние, показывающую развитие до полного гравитационного разделения водной и нефтяной зон. Определите безразмерное время, когда это происходит.

5R. Альтернативный вывод характеристических уравнений. Рассмотрим следующие приводимые уравнения для $u(x, t)$ и $v(x, t)$:

$$\begin{aligned}
 A_1 \cdot u_1 + B_1 \cdot u_x + C_1 \cdot v_t + D_1 \cdot v_x &= 0 \\
 A_2 \cdot u_1 + B_2 \cdot u_x + C_2 \cdot v_t + D_2 \cdot v_x &= 0
 \end{aligned} \tag{5R-1}$$

(а) Предположим, что u и v являются функциями комбинированной переменной $\sigma = x/t$. Покажите, что уравнение (5R-1) может быть записано как

$$\begin{pmatrix} B_1 - \sigma \cdot A_1 & D_1 - \sigma \cdot C_1 \\ B_2 - \sigma \cdot A_2 & D_2 - \sigma \cdot C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \tag{5R-2}$$

где $u' = du/d\sigma$ и так далее.

(b) При нетривиальном решении определитель матрицы коэффициентов уравнения (5R-2) должен быть равен 0. Покажите, что это дает характеристические направления, которые дает уравнение (5.6-10).

(c) Вновь, при нетривиальном решении определитель расширенной матрицы (матрица с вектором решения, замененным на столбец) также должен быть равен 0. Покажите, что, если мы заменим второй столбец, эта операция даст следующую зависимость между u и v :

$$\frac{du}{dv} = \frac{B_1 - \sigma^\pm \cdot A_1}{B_2 - \sigma^\pm \cdot A_2} \tag{5R-3}$$

Решения, которые могут быть выражены в виде (x/t) называются *самоподобными*.